第三章　集合与关系

- 集合的概念和表示法
- 集合的运算
- 序偶与笛卡尔积
- 关系及其表示
- 关系的性质
- 复合关系和逆关系
- 关系的闭包运算
- 等价关系与等价类
- 序关系

3-1　集合的概念和表示法

主要知识点：

1、集合的概念

2、集合的表示法

3、集合间的关系

4、幂集

3-1　集合的概念和表示法

集合是一基本概念，广泛用于数学、计算机科学等领域，如程序设计语言，数据结构等。

集合是数学中的基本概念，无法定义，只做说明：

1、我们把具有相同性质的不同对象的全体称为集合，这些对象称为元素。通常用大写字母*A*,*B*,*C*,*D*…表示集合，小写字母*a*,*b*,*c*,*d*…表示元素。对集合有几点说明：

（1） 任一对象*a*，对某一集合*A*来说，*a*属于*A*或*a*不属于*A*，两者必居其一，且仅居其一。并且当*a*属于*A*时，称*a*是*A*的成员，或*A*包含*a*，*a*在*A*之中，*a*属于*A*。即 $a \in A \,\overline{\vee}\, a \notin A$

（2）集合中元素具有互异性和无序性。

3-1　集合的概念和表示法

（3）集合的元素个数可以是有限个也可以是无限个，具有有限个元素的集合的为有限集，否则称为无限集。

（4）集合中的元素也可以是集合，如：

$S=\{1,2,p,\{b\},c,\{q\}\}, 1\in S, b\notin S, \{b\}\in S$

2、集合的表示法

（1）列举法------将某集合的元素列举出

$A=\{a,b,c,d\}, B=\{2,4,6,8\ldots,2n\ldots,\}, C=\{a,a^2,a^3,\cdots,a^n\cdots\}$,

当然,有些集合不能用列举法来表示,如$B'=(0,1)$不可数集.

（2）叙述法------用集合中元素共同性质来表示

$A=\{x|x$是奇数$\}$，$B=\{x|x$是中国的省$\}$，$C=\{y|y=2$或$y=4\}$。

$S=\{x|P(x)\}$, $P(x)$:应满足的谓词。

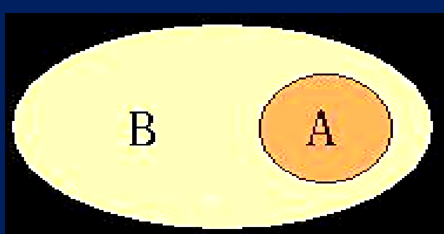
对b,若$P(b)$为T,则$b\in S$;　对c，若$P(c)$为F,则$c\notin S$

3-1　集合的概念和表示法

3、集合间的关系

（1）相等. 集合A和B，若A和B中的所有元素都相同，则称为A和B相等。记作$A=B$，否则$A \neq B$

（2）包含. Set A和B,若A中的所有元素均是B中的元素,称Set B包含Set A,记作$B \supseteq A$,或称为A是B的子集,记作$A \subseteq B$.即A包含于B.



$$A \subseteq B \quad \text{或} \quad B \supseteq A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

（3）若A是B的子集且存在$x \in B$，但$x \notin A$，则称A是B的真子集，记作$A \subset B$或$B \supset A$(真包含)

（4）另外,再定义两个特殊的集合：E, $\varnothing$

⊆

3-1　集合的概念和表示法

定义：若一个Set没有任何元素，这个集合称为**空集**，记作Ø

$\varnothing \neq \{\varnothing\}$，　$\varnothing \in \{\varnothing\}$

$\varnothing=\{x|P(x) \wedge \neg P(x)\}$，$P(x)$是任意谓词。

定义：在一定的范围内，若所有的集合均为某一集合的子集，则称该集合为**全集**。

$E=\{x|P(x) \vee \neg P(x)\}$, $P(x)$是任何谓词。

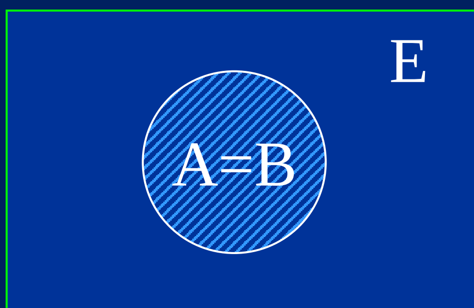
如E为“地球上的人类”，

则“某班学生”、“某学校老师”均是子集。

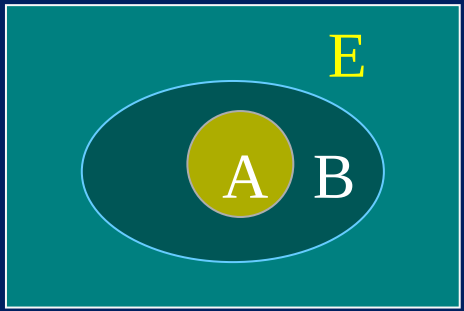
$\subseteq$

3-1　集合的概念和表示法

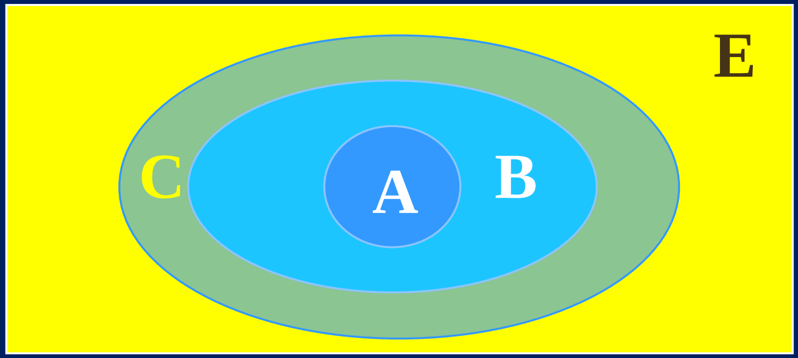
（5）文氏图：用来表示集合之间关系，用一个正方形表示全集，圆表示集合，这样集合之间的关系就可用文氏图来形象地表示。



A=B



A⊆B



传递性

$$A \subseteq B \text{且} B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

3-1　集合的概念和表示法

（6）定理：集合A和集合B是相等的，*iff*　$A \subseteq B$且$B \subseteq A$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{且} B \subseteq A$$

证:$\Rightarrow$（必要性）若$A = B$，则A与B有相同元素。

$\therefore \forall x(x \in A \to x \in B)$为$T$，即$A \subseteq B$

且$\forall x(x \in B \to x \in A)$为$T$,即$B \subseteq A$

$\Leftarrow$（充分性）若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，$A = B$。

用反证法，假设$A \neq B$

则$(\exists x)((x \in A) \wedge (x \notin B)), \therefore A \nsubseteq B$

或$(\exists x)((x \in B) \wedge (x \notin A)), \therefore B \nsubseteq A$

矛盾$, \therefore A = B$

* 以后判断两集合相等就主要用这一重要定理。

定理：对任一*Set* A，$\varnothing \subseteq A$

3-1　集合的概念和表示法

例：若$A=\{a,b,c\}$,写出其所有子集。

解：Ø 、$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$、$\{a，b\}$、$\{a，c\}$、$\{b，c\}$、$\{a，b，c\}$

均是A的子 集，这些子集也可以构成一集合。

4、幂集：由集合A的所有子集为元素组成的集合S称为A的幂集，记作$P(A)$。

如$A=\{a,b,c\}$，则$S=P(A)$

$=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

3-1　集合的概念和表示法

定理：A有n个元素，$P(A)$有2^n个元素，即A 的子集数为2^n个。

证：由n个元素中取k个元素构成的子集合个数为C_n^k

$P(A)$中元素总数为N　　$k=0$时$\varnothing$

$$N=1+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k$$ 二项式展开公式

又$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}$　取$x=y=1$，则$2^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k$

$\therefore N=2^n$

3-1　集合的概念和表示法

例：确定下列集合的幂集

1）$P(\varnothing)$　　2)$P(P(\varnothing))$

解：1）$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$

$\varnothing$有0个元，$\therefore P(\varnothing)$有$2^0=1$个元

$\therefore P(\varnothing)$的幂集为$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

2）$P(P(\varnothing))=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

$\therefore$ 其幂集数为$\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

3-1　集合的概念和表示法

主要知识点（回顾）：

1、集合的概念

2、集合的表示法：列举法、叙述法

3、集合间的关系：相等、包含、真包含、空集、全集、文氏图

4、幂集

3-2　集合的运算

主要知识点：

1、交

2、并

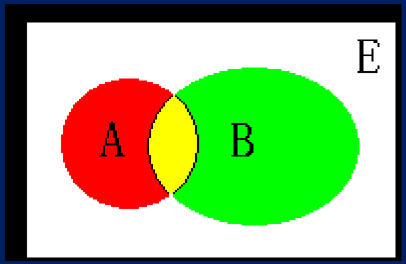
3、补

4、对称差

3-2　集合的运算

1、交

定义：A和B是集合，由所有既属于A又属于B的元素组成的集合S称为A和B的交集，记作$A \cap B = S$



$$S = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

注意集合∩交与数理逻辑中∧合取运算不同

交运算性质：

(1) $A \cap A = A$

(2) $A \cap \varnothing = \varnothing$

(3) $A \cap E = A$

(4) $A \cap B = B \cap A$　交换律

(5) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$

(6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$　结合律

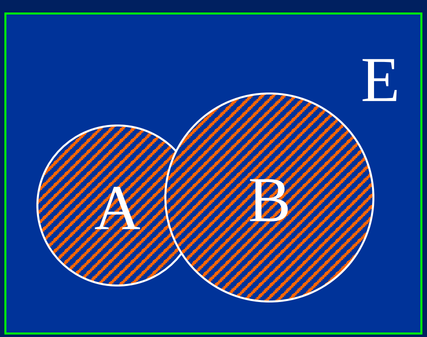
3-2　集合的运算

$\because \cap$有结合性

$\therefore$ 对于n个集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$，可表示成$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

2、并

定义：A和B是集合，由所有属于A或者属于B的元素组成的集合S称为A和B的并集，记作$A \cup B = S$



$$S = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

注意集合$\cup$交与数理逻辑中$\vee$析取运算不同

3-2　集合的运算

并运算性质：

（1）$A \cup A = A$

（2）$A \cup E = E$

（3）$A \cup \phi = A$

（4）$A \cup B = B \cup A$　交换律

（5）$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　结合律

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

（6）$A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$

（7）$A \subseteq B, C \subseteq D$，则$A \cup C \subseteq B \cup D$

书上有证明！

3-2　集合的运算

交、并运算之间的关系：

（1）分配律：

$a)\quad A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$b)\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

证明：$a)$书上有，只证$b)$

$b)$　设$S=A\cup(B\cap C)$，$T=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

先证明：$S\subseteq T$

对于$\forall x\in S$，$x\in A\vee x\in B\cap C$

若$x\in A$，则$x\in A\cup B\wedge x\in A\cup C, \therefore x\in T$

若$x\in B\cap C$，则$x\in B\wedge x\in C, \therefore x\in A\cup B\wedge x\in A\cup C, \therefore x\in T$

$\therefore S\subseteq T$

3-2　集合的运算

再证$T \subseteq S$

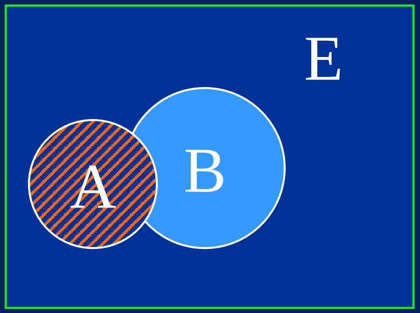
对于$\forall x \in T$，$x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$

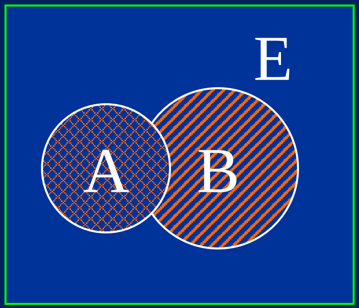
若$x \in A$，则$x \in A \cup (B \cap C)=S$

若$x \notin A$，则$x \in B \wedge x \in C, \therefore x \in B \cap C$

$\therefore x \in A \cup (B \cap C)=S$

$\therefore T \subseteq S, \therefore T = S$

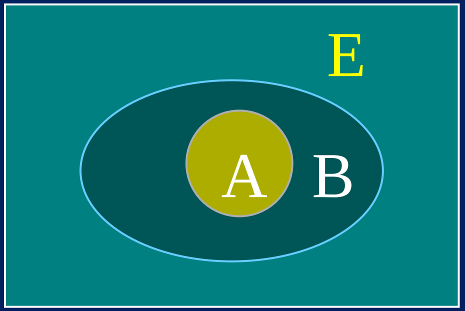




（2）吸收律：

a)　$A \cup (A \cap B) = A$

b)　$A \cap (A \cup B) = A$



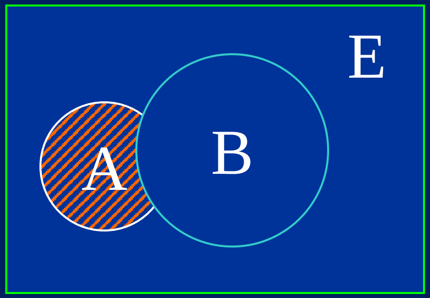
（3）$A \subseteq B$当且仅当$A \cup B = B$或者$A \cap B = A$

参考书上证明

3-2　集合的运算

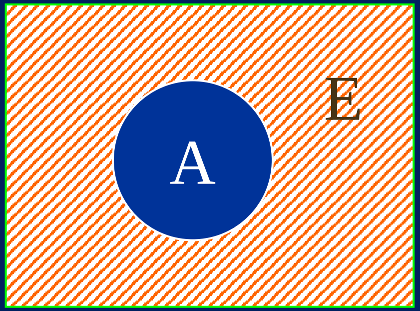
3、补

定义：*A*和*B*是集合，由所有属于*A*而不属于*B*的元素组成的集合*S*称为*B*关于*A*的补集，记作*A* –*B*=*S*，也称*A*和*B*的差或者相对补。



$$S=\{x\,|\,(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$$
$$=\{x\,|\,(x\in A)\wedge\neg(x\in B)\}$$

集合*A*关于全集*E*的补*E*-*A*，称为*A*的绝对补，记作~*A*。



$$\sim A=\{x\,|\,(x\in E)\wedge(x\notin A)\}$$

3-2　集合的运算

$\sim A$有下列性质：

(1) $\sim(\sim A)=A$　　(2) $\sim E=\phi$　　(3) $\sim\phi=E$

(4) $A\cup\sim A=E$　(5) $A\cap\sim A=\phi$

定理：A和B是集合，则：

a) $\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$　　b) $\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

证明：a）参考书上

b) $\sim(A\cap B)=\{x\mid x\in\sim(A\cap B)\}$

$=\{x\mid x\notin A\cap B\}$　即x不能同时在A和B中，

即x不在A中或x不在B中

$=\{x\mid x\notin A)\vee(x\notin B)\}$

$=\{x\mid(x\in\sim A)\vee(x\in\sim B)\}=\sim A\cup\sim B$

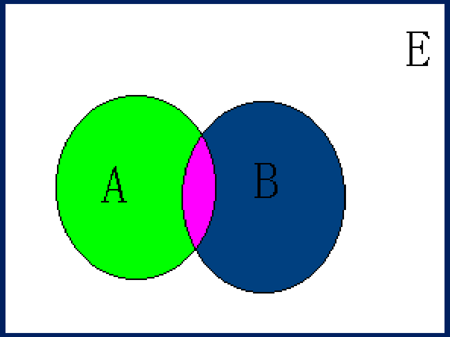
3-2　集合的运算

定理：对于A,B,C集合，有

a）$A-B=A\cap\sim B$

b）$A-B=A-A\cap B$

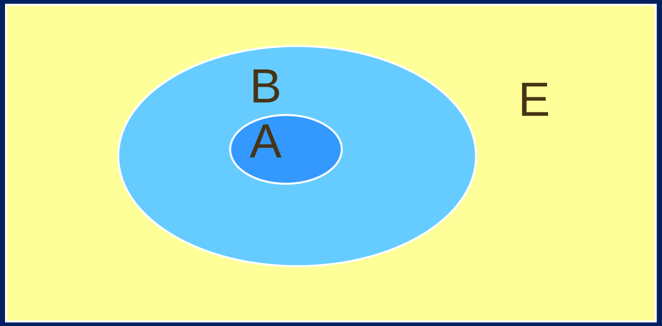
c）$A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C$



定理：若$A\subseteq B$，则

a) $\sim B\subseteq\sim A$

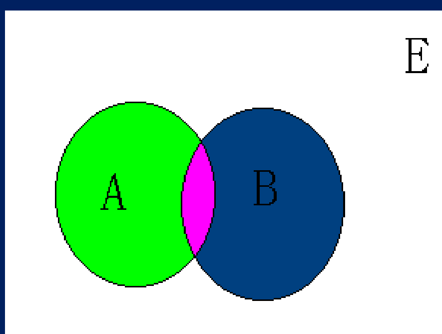
b) $(B-A)\cup A=B$



3-2　集合的运算

4、对称差

定义：由所有属于*A*或属于*B*但不能同时属于*A*和*B*的元素组成的集合*S*称为***A*和*B*的对称差**，记作$A\oplus B=S$



$$S=A\oplus B=\{x\mid (x\in A)\,\overline{\vee}\,(x\in B)\}$$
$$=(A-B)\cup(B-A)$$

3-2　集合的运算

对称差有下列性质：

（1）$A \oplus B = B \oplus A$　交换律

（2）$A \oplus \phi = A$

（3）$A \oplus A = \phi$

（4）$A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)$

（5）$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$　结合律

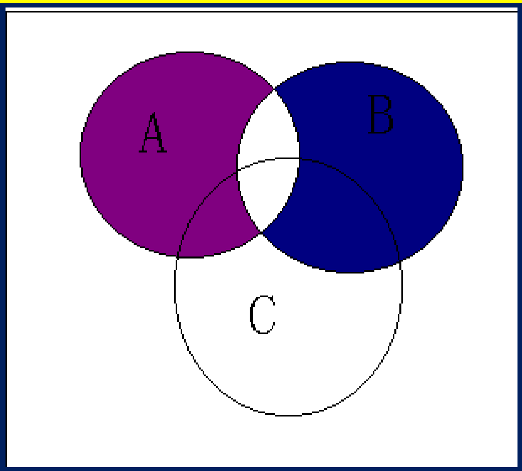
（6）$A \oplus \sim A = E$

对于结合律，书上有证明

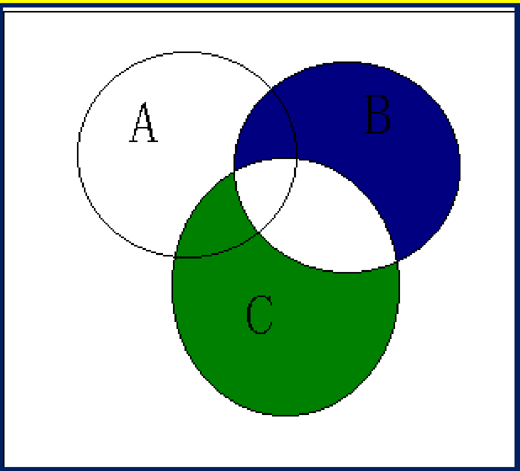
我们仅用文氏图来给予说明

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

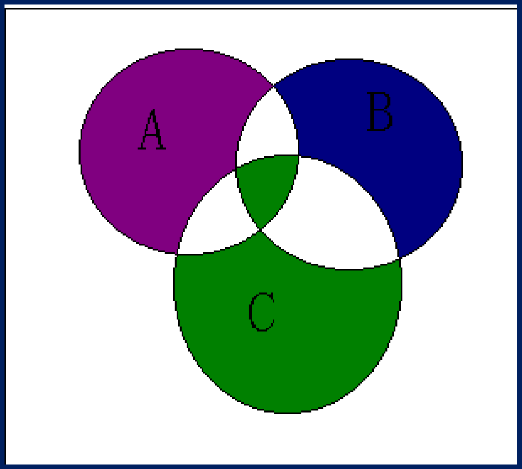
3-2　集合的运算



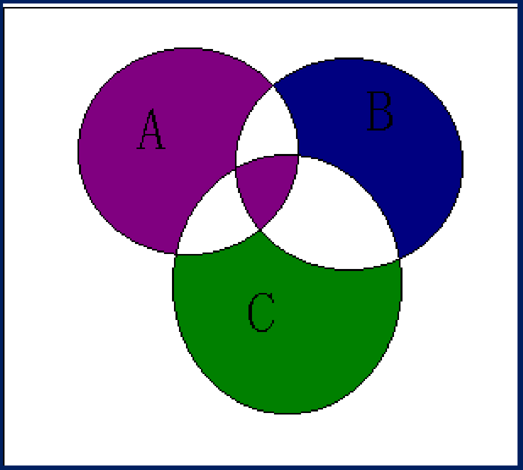
$A \oplus B$



$B \oplus C$

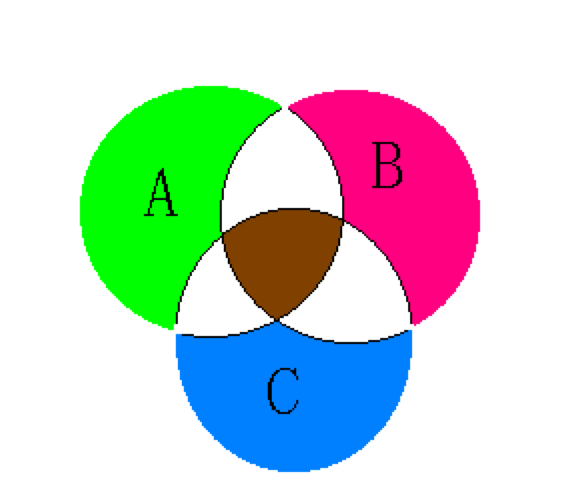


$(A \oplus B) \oplus C$



$A \oplus (B \oplus C)$

3-2　集合的运算



分为四个部分的并

$A \cap \sim B \cap \sim C$　　$\sim A \cap B \cap \sim C$

$C \cap \sim A \cap \sim B$　　$A \cap B \cap C$

3-2　集合的运算

主要知识点（回顾）：

1、交

2、并

3、补：相对补，绝对补

4、对称差

$P95(6)$确定以下各式

$$\phi \cap \{\phi\} = \phi$$

$$\{\phi\} \cap \{\phi\} = \{\phi\}$$

$$\{\phi, \{\phi\}\} - \phi = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$\{\phi, \{\phi\}\} - \{\phi\} = \{\{\phi\}\}$$

$$\{\phi, \{\phi\}\} - \{\{\phi\}\} = \{\phi\}$$

3-4 序偶和笛卡尔积

主要知识点：

1、序偶

2、序偶相等

3、*n*元组

4、笛卡尔积

5、多重直积

6、笛卡尔积运算性质

3-4 序偶和笛卡尔积

在日常生活中，许多事物是成对出现的，并且具有一定的顺序，如上、下；左、右；3 <8；大、小；多少等等。

1、序偶 有固定次序的客体*a*，*b*组成的有序序列，记作<*a*, *b*>

序偶通常用来表达两个客体之间的关系。

注意：

a）次序是非常重要的；**<*a*，*b*>**与**<*b*，*a*>**是不等的

b）序偶中两个元素可来自不同集合。

如**<*a*，2>**，其中*a*∈{*a*,*b*,*c*}，1 ∈{1,2,3}

3-4 序偶和笛卡尔积

2、序偶相等

有两个序偶$<a,b>=<u,v>$ iff $a=u,b=v$.

3、序偶的概念推广到三元组。

三元组是序偶，其第一个元素本身是序偶，第二个元素是客体，

$$<<a,b>, c>=<a,b,c>$$

$$<<a,b>,c> =<<u,v>,w> \quad \text{iff} \quad a=u,b=v,c=w$$

三元组$<<a,b>,c> \neq <a,<b,c>>$，因为后者不是三元组。

3-4 序偶和笛卡尔积

四元组也是序偶，第一个元素是三元组，第二个元素是客体。

$<<a,b,c>,d> = <<<a,b>,c>,d>$记作$<a,b,c,d>$。

n元组是序偶，第一元素是n-1元组，第二元素是客体。

n元组相等定义：

$< x_1, x_2, \cdots, x_n > = << x_1, x_2, \cdots, x_{n-1} >, x_n >$ 且

$< x_1, x_2, \cdots, x_n > = < y_1, y_2, \cdots, y_n > \quad iff \quad x_1 = y_1, x_2 = y_2, \cdots, x_n = y_n$

3-4 序偶和笛卡尔积

4、笛卡尔乘积（直积）： A、B是集合，A中的元素作为序偶的第一个元素，B中的元素作为序偶的第二个元素，所有的这种序偶构成的集合称为A和B的笛卡尔积，记作：$A \times B$

$$A \times B = \{<a,b> \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

2×3

例：$A = \{\alpha, \ \beta\}$，$B = \{1,2,3\}$

$$A \times B = \{\langle \alpha,1\rangle, \langle \alpha,2\rangle, \langle \alpha,3\rangle, \langle \beta,1\rangle, \langle \beta,2\rangle, \langle \beta,3\rangle\}$$

$$B \times A = \{\langle 1,\alpha\rangle, \langle 2,\alpha\rangle, \langle 3,\alpha\rangle, \langle 1,\beta\rangle, \langle 2,\beta\rangle, \langle 3,\beta\rangle\}$$

$A \times B \neq B \times A$不满足交换律

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \phi$$

规定：若$A = \phi$或$B = \phi$，则$A \times B = \phi$

3-4 序偶和笛卡尔积

$$A\times A=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\beta,\alpha\rangle,\langle\beta,\beta\rangle\}$$

$$B\times B=\{\langle1,1\rangle,\langle1,2\rangle,\langle1,3\rangle,\langle2,1\rangle,\langle2,2\rangle,\langle2,3\rangle,\langle3,1\rangle,\langle3,2\rangle,\langle3,3\rangle\}$$

考虑直积$A\times B$中元素个数？

若A中元素个数为m，B中元素个数为n，则
$A\times B$中元素个数为mn

3-4 序偶和笛卡尔积

5、多重直积：

A_1，A_2，A_3是集合，$A_1 \times A_2$是笛卡尔乘积，也是集合，仍可再作笛卡尔积：

$$(A_1 \times A_2) \times A_3$$

$$= \{<< a_1, a_2 >, a_3 > | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}$$

$$= \{< a_1, a_2, a_3 > | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}$$

$$A_1 \times (A_2 \times A_3)$$

$$= \{\underline{< a_1, < a_2, a_3 >>} | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}$$

不是三元组

$$\neq \{\underline{< a_1, a_2, a_3 >} | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}$$

$$\therefore (A_1 \times A_2) \times A_3 \neq A_1 \times (A_2 \times A_3)$$

不满足结合性！

3-4 序偶和笛卡尔积

规定记 $(A_1\times A_2)\times A_3$ 为 $A_1\times A_2\times A_3$

$$\therefore A_1\times A_2\times A_3\times A_4=(A_1\times A_2\times A_3)\times A_4$$
$$=((A_1\times A_2)\times A_3)\times A_4$$

类似的：$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=(((A_1\times A_2)\times A_3)\times\cdots)\times A_n$

若 $A=B$，记 $A\times A=A^2$

$$A\times A\times A=A^3$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{个}}=A^n$$

3-4 序偶和笛卡尔积

6、笛卡尔积是集合间的一个运算，有如下性质：

定理： $\times$关于$\cup$,$\cap$的分配律 A、B、C均为集合

a)、$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

b)、$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

c)、 $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

d)、 $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

书上有证明，不讲了

定理：若$C\neq\phi$,则$A\subseteq B\Leftrightarrow(A\times C\subseteq B\times C)\Leftrightarrow(C\times A\subseteq C\times B)$

注意：当$C=\phi$时，则$\Leftarrow$未必成立

3-4 序偶和笛卡尔积

定理：A、B、C、D是非空集合，则 $A\times B\subseteq C\times D$

当且仅当$A\subseteq C$且$B\subseteq D$

证:⇒必要性　$\forall x\in A,\forall y\in B$

$$(x\in A)\wedge(y\in B)\Rightarrow\langle x,y\rangle\in A\times B \qquad \because A\times B\subseteq C\times D$$

$$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in C\times D$$

$$\Rightarrow(x\in C)\wedge(y\in D)\therefore \mathrm{A}\subseteq \mathrm{C}\text{且}\mathrm{B}\subseteq \mathrm{D}$$

⇐充分性$\langle x,y\rangle\in A\times B\Rightarrow(x\in A)\wedge(y\in B)$

$$\Rightarrow(x\in C)\wedge(y\in D) \quad \because A\subseteq C\text{且}B\subseteq D$$

$$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in C\times D \quad \therefore A\times B\subseteq C\times D$$

3-4 序偶和笛卡尔积

主要知识点（回顾）：

1、序偶

2、序偶相等

3、*n*元组

4、笛卡尔积

5、多重直积

6、笛卡尔积运算性质

3-5　关系及其表示

主要知识点：

1、关系及其表示

2、关系的运算

3、关系矩阵和关系图

3-5　关系及其表示

关系是什么？

关系的概念，在现实生活中，就有许多大家熟悉的例子。

兄弟关系，父子关系；

上下级关系，同事关系；

数学中大于、小于关系等等。

1、关系常用于表示两个集合中的客体之间的联系

序偶：有序系列 $\langle a, b\rangle$，表示客体 a 和客体 b 之间的联系；

关系：用序偶构成的集合来表示。

3-5　关系及其表示

例：$A=\{1,2,3,4\}$，求A上的$>$关系。

$$>=\{<2,1>,<3,1>,<4,1>,<3,2>,<4,2>,<4,3>\}$$

$$> \subseteq A\times A$$

$A=\{x \mid x$是B130409班的任课老师$\}$

$B=\{x \mid x$是B130409班的学生$\}$

$A\times B=\{<x,y> \mid x\in A\wedge y\in B\}$－B130409班上的师生关系

可知，若R是从A到B上的关系，则$R\subseteq A\times B$

3-5 关系及其表示

2、前域、值域、域

R是二元关系，由$<x,y>\in R$的所有x组成的集合$domR$称为R的前域，即

$$domR=\{x\mid(\exists y)(<x,y>\in R)\}$$

由$<x,y>\in R$的所有y组成的集合$ranR$称为R的值域，即

$$ranR=\{y\mid(\exists x)(<x,y>\in R)\}$$

R的前域和值域一起称作R的域，记为$FLD\ R$

$$FLD\ R=domR\cup ranR$$

例：$A=\{1,2,3,4,5\},B=\{1,2,4\}$，关系$H=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,4\rangle\}$

则$domH=\{1,2,3\},ranH=\{2,4\},FLDH=\{1,2,3,4\}$

3-5　关系及其表示

X、Y是集合， $X \times Y$的子集构成一个关系R

若X,Y为有限集，则从X到Y有$2^{|X|\times|Y|}$个不同的关系。

$\because domR \subseteq X, ranR \subseteq Y$

$\therefore domR \cup ranR \subseteq X \cup Y$

例：$X=\{1,2,3,4\}$，求X上的$>$关系。

$$>=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$$

$dom >=\{2,3,4\}$　　$ran >=\{1,2,3\}$　　$FLD >=\{1,2,3,4\}$

例：$H=\{f,m,s,d\}$,则其全域关系H_1为：

$$H_1=H\times H=\{\langle f,f\rangle,\langle f,m\rangle,\langle f,s\rangle,\langle f,d\rangle,\cdots\cdots,\langle d,f\rangle,\langle d,m\rangle,\langle d,s\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

3-5　关系及其表示

3、两种特殊关系：

空关系：ϕ——互不相识关系

恒等关系：$I_A=\{<x,x>|\forall x\in A\}$

例：$A=\{1,2,3\}$,

$I_A=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$

特别注意，必须包含所有<*x*,*x*>

而：$R=\{<1,1>,<2,2>\}$不是恒等关系I_A

3-5　关系及其表示

4、关系的运算：

对同一域上的关系，可以有交、并、补、差运算

如：$X=\{a,b,c\},Y=\{1,2\}$，R和S是从X到Y的关系，

$$R=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\},\quad S=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$$

$$R\cup S=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$$

$$R\cap S=\{\langle a,1\rangle\}$$

$$\sim R=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}=X\times Y-R \qquad X\times Y\text{为全集}$$

$$R-S=\{\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$$

3-5　关系及其表示

定理：若Z和S是从集合X到Y的两个关系，则

$Z\cap S, Z\cup S, \sim Z, \sim S, Z-S$也是$X$到$Y$的关系。

我们用序偶集合表示关系，R是从X到Y上的关系，

当X、Y为有限集时，可用关系矩阵和关系图来表示。

3-5 关系及其表示

5、关系矩阵和关系图：

R是从X到Y的关系，X和Y是有限集合，

$$X=\{x_1,x_1,\cdots,x_m\} \qquad Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$$

R的关系矩阵:

$$M_R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}=\left[r_{ij}\right]_{m\times n}$$

其中：$r_{ij}=\begin{cases} 1 & <x_i,y_j>\in R \\ 0 & <x_i,y_j>\notin R \end{cases}$

任意两个元素间用1或者0表示有关系R或没有关系R。

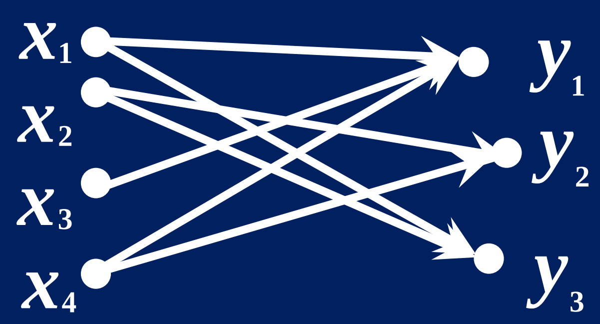
3-5　关系及其表示

关系图：有限集的二元关系可以用图形表示。若R是从X到Y的关系，$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，在平面上画m个结点$x_1,x_2,\cdots,x_m$，画n个结点$y_1,y_2,\cdots,y_n$。如果x_iRy_j，则自结点x_i至结点y_j画一条有向弧，得到的图就是R的关系图。

例1：$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，　　$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$

$$R=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_3>,<x_2,y_2>,<x_2,y_3>,<x_3,y_1>,<x_4,y_1>,<x_4,y_2>\}$$

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}_{4\times 3}$$

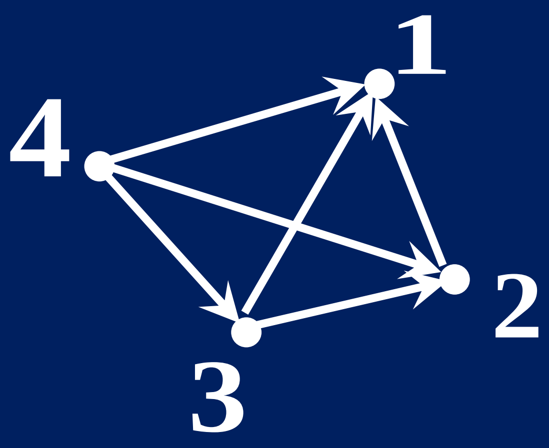


3-5　关系及其表示

例2：$A=\{1,2,3,4\}$　　A上的$>$关系。

$> \ =\{<2,1>,<3,1>,<4,1>,<3,2>,<4,2>,<4,3>\}$

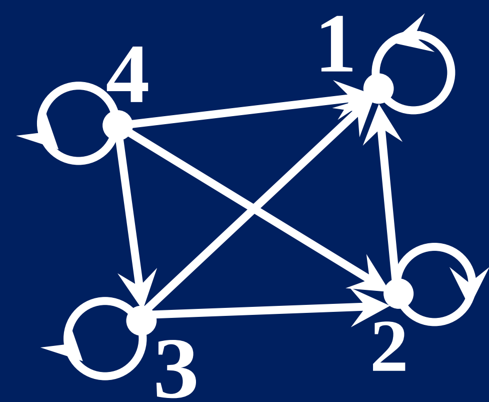
$$M_{>}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}_{4\times 4}$$



3-5　关系及其表示

但若求A上的$\geq$关系，则$\underline{\geq} = \underline{> \cup I_A}$

图为：



$\langle 1,1\rangle \in \geq$　画一条弧从 1 出发到 1 结束

3-5　关系及其表示

$\therefore$ 关系表示有三种方法 $\left\{\begin{array}{l} \text{序偶} \\ \left.\begin{array}{l}\text{关系矩阵} \\ \text{关系图}\end{array}\right\rangle \text{要求} X\text{、}Y \text{有限集合} \end{array}\right.$

由于X到Y的关系R, $R \subseteq X \times Y$,而$X \times Y \subseteq (X \cup Y) \times (X \cup Y)$

$\therefore R \subseteq (X \cup Y) \times (X \cup Y)$因而我们以后仅讨论同一集合上的关系

3-5　关系及其表示

主要知识点（回顾）：

1、关系及其表示

2、关系的运算

3、关系矩阵和关系图

3-6　关系的性质

主要知识点：

1、自反性

2、对称性

3、传递性

4、反自反性

5、反对称性

3-6　关系的性质

这里我们仅讨论在集合X上的二元关系。（对于X到Y的关系可以改为此类）。

R是X上的二元关系

1、自反性

R在X上自反$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \rightarrow \langle x, x\rangle \in R)$为真

如：实数域上的“$\leq$”关系,$1 \leq 1, \langle 1,1\rangle \in$“$\leq$”,$2 \leq 2, \langle 2,2\rangle \in$“$\leq$”

三角形全等关系$\cong$，三角形自身与自身全等。

（注：对X上的所有元素而言,$\langle x, x\rangle \in R$）

也即$I_X \subseteq R$

3-6　关系的性质

2、对称性：

R在X上对称$\Leftrightarrow(\forall x)(\forall y)(x\in X\wedge y\in Y\wedge xRy\to yRx)$为真

注：若没有$\underset{x\neq y}{\langle x,y\rangle}\in R$，则也称具有对称性。

如：$R=I_X$，R是对称的

如：$X=\{1,2,3\},R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$　　则R是对称的。

两个三角形的相似关系：$\sim$，$\Delta_1\sim\Delta_2\to\Delta_2\sim\Delta_1$

3-6　关系的性质

例：$A=\{2,3,5,7\}$　　$R=\{\langle x,y\rangle \mid \dfrac{x-y}{2}$是整数$\}$。

$(\forall x)(x\in A\rightarrow \dfrac{x-x}{2}=0$是整数$)$

$\therefore \langle x,x\rangle \in R$

$\therefore R$是自反的。

若$\dfrac{x-y}{2}$是整数,$\langle x,y\rangle \in R$　　则$\dfrac{y-x}{2}$也是整数　$\langle y,x\rangle \in R$

$\therefore R$是对称的。

$\langle 5,3\rangle \in R, \langle 3,5\rangle \in R$。

3-6　关系的性质

3、传递性：

$$R\text{在}A\text{上传递} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge$$
$$< x, y > \in R \wedge < y, z > \in R \rightarrow < x, z > \in R)\text{为真}$$

注：若没有 $< x, y > \in R \wedge < y, z > \in R$，则也称具有传递性。

例1：$A=\{1,2,3\}$，$R=\{<1,2>,<1,3>\}$

例2：“$\leq$”　$1 \leq 2, 2 \leq 3 \rightarrow 1 \leq 3$

“$=$”　$x = y, y = z \rightarrow x = z$

“$<$”　$1 < 2, 2 < 3 \rightarrow 1 < 3$

又如：日常生活中，同姓关系：甲、乙姓氏相同，乙、丙姓氏相同，甲、丙姓氏也相同，传递性成立。

3-6　关系的性质

4、反自反性：

R具有反自反性$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in X \to \langle x, x\rangle \notin R)$为真。

如：父子关系，自己与自己不能是父子；

$>$关系：$x \not> x$。

提问：反自反是否就是自反的否定？
也即是否不是自反就一定是反自反的？

3-6　关系的性质

自反的否定：

$\neg(\forall x)(x \in X \rightarrow \langle x, x\rangle \in R) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in X \wedge \langle x, x\rangle \notin R)$

$(\exists x)(x \in X \wedge \langle x, x\rangle \notin R)$和$(\forall x)(x \in X \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$不等价,
所以自反的否定不同于反自反。

如：$A = \{1,2,3\}$,　　$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$\because \langle 2,2\rangle \notin R$　$\therefore R$不是自反的，R也不是反自反的,$\langle 1,1\rangle, \langle 3,3\rangle \in R$

∴不是自反的与反自反的不是等价的，不是同一回事。

3-6　关系的性质

5、反对称性：

若$\langle x,y\rangle\in R,\langle y,x\rangle\in R$,必有：$x=y$,称$R$为反对称的

如：“$\le$”，$\left.\begin{matrix}x\le y\\ y\le x\end{matrix}\right\}\to x=y$，　$\subseteq$　$\left.\begin{matrix}A\subseteq B\\ B\subseteq A\end{matrix}\right\}\to A=B$

给出两个简单结论：

a、关系既可以对称的，又可以是反对称的。

如：$A=\{1,2,3\},R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$是对称的，也是反对称的。

b、关系可以既不是对称的，又不是反对称的。

如：$A=\{1,2,3\},R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

3-6　关系的性质

反对称性

$$(\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in Y \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$$

的另一种等价定义：

$$(\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in Y \wedge (x \neq y) \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \notin R)$$

$$\because \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow (x = y)$$

$$\Leftrightarrow (x \neq y) \rightarrow \neg(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R)$$

$$\Leftrightarrow \neg(x \neq y) \vee \neg(\langle x, y \rangle \in R) \vee (\langle y, x \rangle \notin R)$$

$$\Leftrightarrow \neg((x \neq y) \wedge \langle x, y \rangle \in R) \vee (\langle y, x \rangle \notin R)$$

$$\Leftrightarrow (x \neq y) \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \notin R$$

3-6　关系的性质

举例：$A=\{1,2,3\}$，

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，$R_2=\{<1,2>\}$

$R_3=\{<1,2>,<2,1>,<1,1>\}$，$R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

试判断关系分别满足哪些性质？

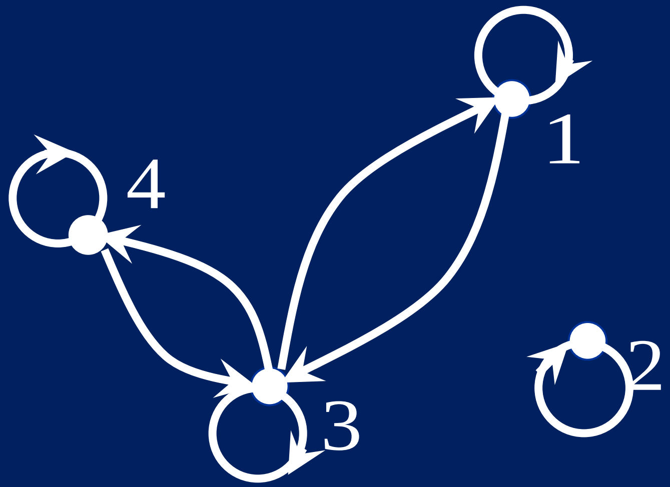
	R_1	R_2	R_3	R_4
自反性	×	×	×	×
反自反性	×	√	×	√
对称性	√	×	√	×
反对称性	√	√	×	×
传递性	√	√	×	×

3-6　关系的性质

$I=\{1,2,3,4\}, R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$

讨论R的性质。

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}_{4\times 4}$$



首先，R是自反的，R是对称的，

$\langle 1,3\rangle,\langle 3,4\rangle\in R$　但$\langle 1,4\rangle\notin R$　$\therefore R$不是传递的。

R不是反自反的，R不是反对称的，$\langle 3,4\rangle$、$\langle 4,3\rangle\in R$

3-6　关系的性质

从关系矩阵、关系图来判断五个性质：

1、自反的：关系矩阵的对角线上元素全为1，
关系图中 每个结点均有自回路。

2、对称的：关系矩阵是对称矩阵，
关系图中若两个结点之间有有向弧，则必成对出现

3、反自反的：关系矩阵中对角线元素全为0，
关系图中每个结点都没有自回路。

4、反对称的：关系矩阵以对角线对称的元素不能同时为1，
（但可为对称阵，同时为0），
关系图中如果两个结点之间有有向弧，则不能成对出现。

5、传递性：不能明确判断，只能用定义。

3-6　关系的性质

主要知识点（回顾）：

1、自反性

2、对称性

3、传递性

4、反自反性

5、反对称性

3-7　复合关系和逆关系

主要知识点：

1、复合关系

2、逆关系

3-7　复合关系和逆关系

为了确切表示复合关系，我们举一实例：
a,b是兄弟关系R，b,c是父子关系S, 则a,c是叔侄关系T, T是R和S的复合关系。

1、复合关系：为了明确地表示复合关系，给出定义：

定义：R是X到Y的关系，S是Y到Z的关系，则R和S的复合关系$R\circ S$称为R和S的复合关系，表示为：

$$R\circ S=\{\langle x,z\rangle \mid x\in X\wedge z\in Z\wedge(\exists y)(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S)\}$$

如：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,2\rangle\}$　　$S=\{\langle 4,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

则：$R\circ S=\{\langle 1,5\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,5\rangle\}$　　从左至右复合。

如：$S'=S\cup\{\langle 4,1\rangle\}$，　则：$R\circ S'=\{\langle 1,5\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,5\rangle\}$

3-7　复合关系和逆关系

$S\circ R=\{\langle 4,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,4\rangle\}$,　　$R\circ S\neq S\circ R$　　不满足交换律

求复合关系，也称为合成运算。

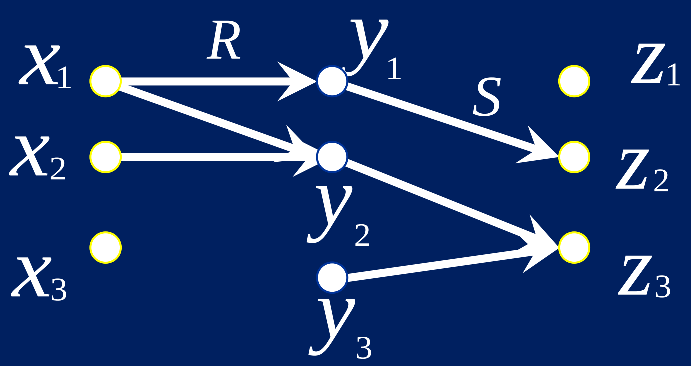
$(R\circ S)\circ R=\{\langle 3,2\rangle\}$　　$R\circ(S\circ R)=\{\langle 3,2\rangle\}$　合成运算具有结合律。

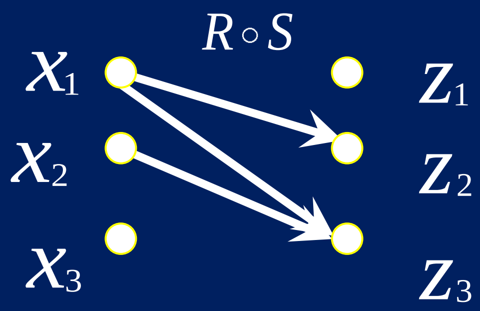
又例：　$X=\{x_1,x_2,x_3\}$　$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$　$Z=\{z_1,z_2,z_3\}$

$R=\{<x_1,y_1>,<x_1,y_2>,<x_2,y_2>\}$　　$S=\{<y_1,z_2>,<y_2,z_3>,<y_3,z_3>\}$

$R\circ S=\{<x_1,z_2>,<x_1,z_3>,<x_2,z_3>\}\}$

通过关系图来求复合





3-7　复合关系和逆关系

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通过关系矩阵求复合

$$M_{R\circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有：$\underline{M_{R\circ S} = M_R \circ M_S}$

$M_{R\circ S}$第一行第一列元素0是M_R第一行元素与M_S第一列元素相乘再逻辑相加得到。

$[M_{R\circ S}]_{ij}$：M_R第i行元素与M_S第j列元素逻辑相乘再逻辑相加所得。

一般地：　$M_{R\circ S} = M_R \circ M_S$

3-7　复合关系和逆关系

$$M_R = [u_{ij}] \qquad u_{ij} = \begin{cases} 1 & <x_i, y_j> \in R \\ 0 & <x_i, y_j> \notin R \end{cases}$$

$$M_S = [v_{jk}] \qquad v_{jk} = \begin{cases} 1 & <y_j, z_k> \in S \\ 0 & <y_j, z_k> \notin S \end{cases}$$

$$\wedge : \begin{cases} 0 \wedge 0 = 0 \\ 0 \wedge 1 = 0 \\ 1 \wedge 0 = 0 \\ 1 \wedge 1 = 1 \end{cases} \qquad \vee : \begin{cases} 0 \vee 0 = 0 \\ 0 \vee 1 = 1 \\ 1 \vee 0 = 1 \\ 1 \vee 1 = 1 \end{cases} \therefore M_{R \circ S} = [w_{ik}] \qquad w_{ik} = \bigvee_{j=1}^{n} (u_{ij} \wedge v_{jk})$$

3-7　复合关系和逆关系

如：$A=\{1,2,3,4,5\}$

$R=\{<1,2>,<3,4>,<2,2>\}$　　$S=\{<4,2>,<2,5>,<3,1>,<1,3>\}$

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad M_S=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_R\circ M_S=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$R\circ S=\{<1,5>,<2,5>,<3,2>\}$

3-7　复合关系和逆关系

2、逆关系：

R是X到Y的二元关系，把R中每一序偶的元素次序颠倒，得到的关系称为R的逆关系，记作R^c：

$$R^c = \{<y, x> | <x, y> \in R\}。$$

如：“$>$”逆“$<$”

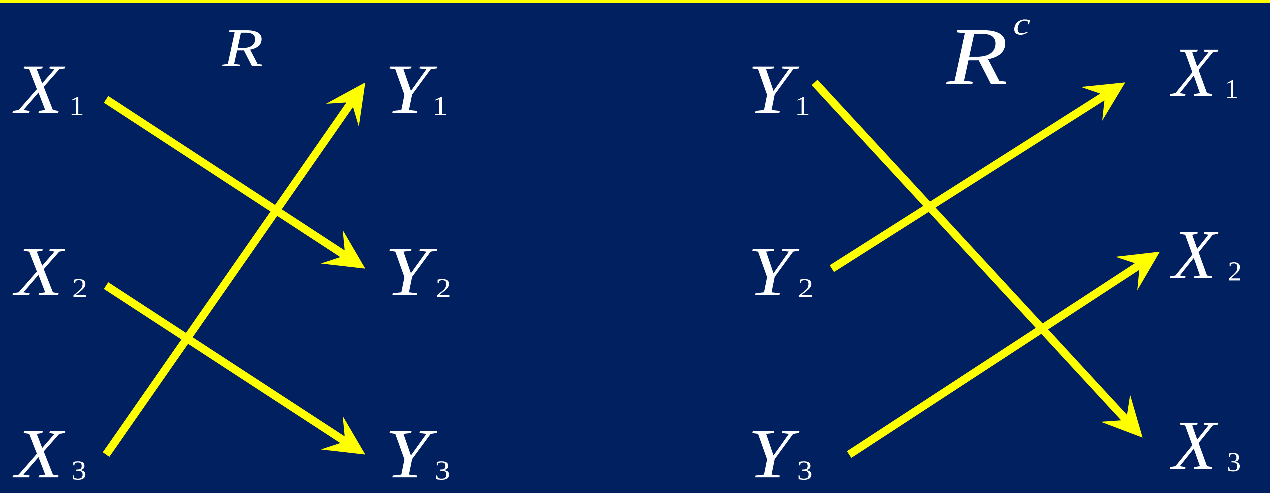
$3 > 2$，$2 < 3$，$\langle 3,2\rangle \in >$，$\langle 2,3\rangle \in <$

如：$X = \{x_1, x_2, x_3\}$　$Y = \{y_1, y_2, y_3\}$

$$R = \{<x_1, y_2>, <x_2, y_3>, <x_3, y_1>\}$$

$$R^c = \{<y_2, x_1>, <y_3, x_2>, <y_1, x_3>\}$$

3-7　复合关系和逆关系



反向关系

关系矩阵

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},\text{转置关系}M_{R^c}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},M_{R^c}=M_R^{\,T}$$

下面讨论逆关系的一些性质：

3-7 复合关系和逆关系

$(1)\left(R^c\right)^c = R$

$(2)R, R_1, R_2$都是从A到B的关系，则：

$a)\quad \left(R_1 \cup R_2\right)^c = R_1^{\ c} \cup R_2^{\ c}$

$b)\quad \left(R_1 \cap R_2\right)^c = R_1^{\ c} \cap R_2^{\ c}$

$c)\quad \left(A \times B\right)^c = B \times A$

$d)(\overline{R})^c = \overline{R^c}$,这里$\overline{R} = A \times B - R$

$e)(R_1 - R_2)^c = R_1^c - R_2^c$

书上对$a),b),e)$均有证明，这里我们证明$b),d)$.

3-7　复合关系和逆关系

证：b)首先两端仍是序偶集合，要证相等即证两集合相等。

$$<x,y>\in(R_1\cap R_2)^c\Leftrightarrow<y,x>\in R_1\cap R_2\Leftrightarrow<y,x>\in R_1\wedge<y,x>\in R_2,$$

$$\Leftrightarrow<x,y>\in R_1^c\wedge<x,y>\in R_2^c\Leftrightarrow<x,y>\in R_1^c\cap R_2^c$$

$$\therefore(R_1\cap R_2)^c=R_1^c\cap R_2^c$$

d) $<x,y>\in(\bar{R})^c\Leftrightarrow<y,x>\in\bar{R}\Leftrightarrow<y,x>\notin R\Leftrightarrow<x,y>\notin R^c$。

$$\Leftrightarrow<x,y>\in\overline{R^c},\therefore(\bar{R})^c=\overline{R^c}$$。

(3)T是$X\to Y$关系，$S:Y\to Z$关系，则$(T\circ S)^c=S^c\circ T^c$

(4)R为X上的二元关系，则：

a)R是对称的$\Leftrightarrow R=R^c$.

3-7 复合关系和逆关系

$b)$ R是反对称的$\Leftrightarrow R\cap R^c \subseteq I_X$，

除$b)$外其它书上都有证明：

证$b)$ $:\Rightarrow R$是反对称的，即$<x,y>\in R\wedge <y,x>\in R\Rightarrow x=y.$

若$<x,y>\in R\cap R^c$,则$<x,y>\in R\wedge <x,y>\in R^c$

即$<x,y>\in R\wedge <y,x>\in R$

根据R反对称性质：$\therefore x=y, <x,y>=<x,x>\in I_X, \therefore R\cap R^c \subseteq I_X$

$\Leftarrow R\cap R^c \subseteq I_X$，

$<x,y>\in R\cap R^c \Leftrightarrow <x,y>\in R\wedge <x,y>\in R^c$

$\Leftrightarrow <x,y>\in R\wedge <y,x>\in R$

因为$R\cap R^c \subseteq I_X, \therefore x=y.$

$\therefore$ 对$\forall <x,y>\in R$且$<y,x>\in R$时有$x=y$,故R是反对称的。

3-7　复合关系和逆关系

书$P118.\quad 3-7$ （1）

R_1, R_2是A上的关系，判断下列命题正确性：

a)若R_1, R_2是自反的，则$R_1 \circ R_2$是自反的

b)若R_1, R_2是反自反的，则$R_1 \circ R_2$是反自反的

c)若R_1, R_2是对称的，则$R_1 \circ R_2$是对称的

d)若R_1, R_2是传递的，则$R_1 \circ R_2$是传递的

a)√　　b)×　　c)×　　d)×

3-7　复合关系和逆关系

$a)\quad \forall x \in A, <x,x> \in R_1, <x,x> \in R_2 \quad \therefore <x,x> \in R_1 \circ R_2$

$b)\quad$ 若$A=\{a,b\} \quad R_1=\{<a,b>\} R_2=\{<b,a>\}$，则$R_1 \circ R_2=\{<a,a>\}$

$c)\quad$ 若$A=\{a,b,c\}, R_1=\{<a,b>,<b,a>\}, R_2=\{<b,c>,<c,b>\}$

则$R_1 \circ R_2=\{<a,c>\}$

$d)\quad$ 若$A=\{a,b,c\}, R_1=\{<a,b>,<b,c>,<a,c>\}, R_2=\{<b,c>,<c,a>,<b,a>\}$

而$R_1 \circ R_2=\{<a,c>,<a,a>,<b,a>\}, <b,c> \notin R_1 \circ R_2$

3-7　复合关系和逆关系

主要知识点（回顾）：

1、复合关系

2、逆关系

3-8　关系的闭包运算

主要知识点：

1、自反闭包

2、对称闭包

3、传递闭包

3-8　关系的闭包运算

上次课我们介绍了关系的两种运算：复合运算和求逆关系，

今天我们介绍第三种运算：关系的闭包运算

例：$X=\{1,2,3\}, R=\{<1,1>,<2,3>,<1,3>\}.$

显然R不是自反的，

但$R'=\{<1,1>,<2,3>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\},$

可知R'是自反的。

$R'\supseteq R$,且若$\forall R''\supseteq R$, R''自反的,则$R''\supseteq R'$,

即R'是包含R且是自反的最小关系，

R'称为R的自反闭包，这一过程叫做闭包运算。

另外对于对称闭包，传递闭包也可类似求出。

3-8　关系的闭包运算

定义：R是X上的关系(一般不特指均是R上的二元关系),

若有另一关系R',满足

$a)R'$是自反的(对称的，传递的)

$b)R'\supseteq R.$

$c)$对任何自反的(对称的，传递的)

关系R'',若$R''\supseteq R$,则$R''\supseteq R'$,则称R'是R的自反(对称，传递)闭包。

分别记作：$r(R),s(R),t(R).(reflection,symmetry,transition)$

例如$>$关系,$\geq$是$>$的自反闭包;$\neq$是对称闭包;$>$是传递闭包。

如$X:I_X=\{<x,x>|x\in X\}.I_X$是自反的，对称的，传递的。

$\therefore r(I_X)=I_X,s(I_X)=I_X,t(I_X)=I_X.$

因而当一个关系本身自反时$r(R)=R$,且是充要的

3-8　关系的闭包运算

定理：设R是X上的关系，则

$a)R$是自反的$\Leftrightarrow r(R)=R;$

$b)R$是对称的$\Leftrightarrow s(R)=R;$

$c)R$是传递的$\Leftrightarrow t(R)=R.$(a书上有证明，现证b).)

证：$b)\Leftarrow$已知$s(R)=R.$　$s(R)$是对称的$,\therefore R$是对称的。

$\Rightarrow R$是对称的，$R\supseteq R,$任一$R'',R''\supseteq R,R''$是对称的，必有$R''\supseteq R.$

$\therefore R$是R的对称闭包，即$s(R)=R.$

3-8 关系的闭包运算

下面给出求关系R的$r(R), s(R), t(R)$的三个定理。

1）定理 R是X上的关系，则$r(R) = R \cup I_X$

证：令$R' = R \cup I_X$,用定义证明,

$a)R'$是自反的,$(\forall x)(x \in X \to <x, x> \in I_X)$

$\therefore (\forall x)(x \in X \to <x, x> \in R').R'$自反成立。

$b)R' \supseteq R.$

$c)R''$是自反的：且$R'' \supseteq R$,则$R'' \supseteq I_X$,

$\therefore R'' \supseteq R \cup I_X = R'$,从而$R' = r(R)$.

这就给出求自反闭包的方法

2）定理 R是X上的关系，则$s(R) = R \cup R^C$.证明是由定义类似可证.

3）定理 R是X上的关系，则$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots\ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

首先解释一下R^i含义。$\because \circ$满足结合律,$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).\therefore (\ )$可省略。

3-8　关系的闭包运算

$\therefore R^2 = R\cdot R, R^3 = R^2\cdot R = (R\cdot R)\cdot R, \cdots, R^i = R^{i-1}\cdot R = R\cdot R\cdot R\cdots R$复合。

对$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots$是无限$R^i$关系的并(集合的并)。

证：$\because \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$是一无穷序列。$\therefore$不好用定义证明。现用另一种方法证明之。

$t(R), \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$均是两个关系是两集合，证明这两个集合相等。（相互包含即可）。

$a)\quad \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$.即证对任意$i \in N, R^i \subseteq t(R)$这是与自然数有关的定理。

我们通常用数学归纳法证明，其步骤是：

基础 : $i = 1$　　　$R \subseteq t(R)$,根据定义显然成立。

假设：$i = n$　　　$R^n \subseteq t(R)$.

归纳：$i = n + 1$　　　证明$R^{n+1} \subseteq t(R)$.

3-8　关系的闭包运算

$\forall <x,y> \in R^{n+1} = R^n \circ R$, 则$\exists z \in X$使的$<x,z> \in R^n$且$<z,y> \in R$.

由假设$<x,z> \in t(R), <z,y> \in t(R)$, $\therefore$由传递性, $<x,y> \in t(R)$。

$\therefore R^{n+1} \subseteq t(R)$, 故$\forall i \in N, R^i \subseteq t(R)$, 从而有$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq t(R)$

$b) t(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$. 直接证明比较困难，利用$t(R)$定义，$t(R)$是包含$R$的最小传递关系。由$t(R)$是传递闭包，对任意$R'', R''$是传递的，且$R'' \supseteq R$, 则$t(R) \subseteq R''$.

1. $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \supseteq R$　成立

2. 要证$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$是传递的。

3-8　关系的闭包运算

若$<x,y>,<y,z>\in\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$是否有$<x,z>\in\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$.

由$\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i = R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$.

则$\exists t,t$是I_+使得$<x,y>\in R^t$和$\exists s,s\in I_+$使得$<y,z>\in R^s$。

$\therefore <x,z>\in R^{t+s}$，故$<x,z>\in\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，$\therefore\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$是传递的。

$\therefore t(R)\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，从而有$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$

有了这三个定理，$r(R),s(R),t(R)$可直接求出，

例：$A=\{a,b,c\},R=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}$，求$r(R),s(R),t(R)$

解：$r(R)=R\cup I_A=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<a,a>,<b,b><c,c>\}$

3-8 关系的闭包运算

$$s(R) = R \cup R^C = \{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<b,a>,<c,b>,<a,c>\}$$

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^t = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

我们用关系矩阵来求：$M_{R^2}, M_{R^3} \cdots$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_{R^2} = M_R \circ M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore R^2 = \{<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$$

$$M_{R^3} = M_{R^2} \circ M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

3-8　关系的闭包运算

$\therefore R^3=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>\}$

$$M_{R^4}=M_{R^3}\circ M_R=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore R^4=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>\}=R$

$\therefore R^4=R, R^5=R^4\circ R=R^2, R^6=R^3, R^7=R^4=R$

故有：$R^1=R^4=\cdots=R^{3n+1}$

$R^2=R^5=\cdots=R^{3n+2}$

$R^3=R^6=\cdots=R^{3n+3}$

$$\therefore t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R\cup R^2\cup R^3$$

$$=\{<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<b,c>,$$

$$<c,a>,<a,c>,<b,a>,<c,b>\}$$

3-8　关系的闭包运算

$$M_{t(R)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

对$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$可记作$R^+$

由上例可看出,有时不必求出每一个R^i,我们至多只要求n次即可。结论不是偶然的，有如下定理:

定理：X是有n个元素的集合,R是X上的关系,则存在一个正整数$k\le n$,使得

$t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^k$.($k$与$X$的个数有关）

证:$R^+=t(R)$,首先$R\cup R^2\cup\cdots\cup R^k\subseteq t(R)$,显然成立.

$t(R)\subseteq R\cup R^2\cup\cdots\cup R^k\qquad(k\le n)$是否成立?

3-8　关系的闭包运算

只需证：$\forall <x,y>\in t(R)$，有 $<x,y>\in R^i, i\le k\le n.$

设$\forall <x,y>\in t(R)=R\cup R^2\cup\cdots$知$<x,y>\in R^p$，且取$p$是使$<x,y>\in R^k$的最小正整数，求证$p\le n$.用反证法：

设有$<x,y>\in t(R)$，而$<x,y>\in R^p$，p是最小的

假设$p>n$，$<x,y>\in R^p=\underbrace{R\circ R\circ\cdots\circ R}_{p个}$

则可找到序列$e_1,e_2,\cdots,e_{p-1}$使得

$x\,Re_1, e_1\,Re_2,\cdots,e_{p-1}Ry$，经过这$p$步$x$对应到$y$

而$x,e_1,e_2,\cdots,e_{p-1}$有p个元素，$p>n$，而X中有n个元素，记$e_0=x$

$\therefore e_0,e_1,\cdots,e_{p-1}$中必有两个相同，记为$e_t=e_q$　　$0\le t<q<p$(抽屉原理)

$\underbrace{x\,Re_1, e_1\,Re_2,\cdots,e_{t-1}\,Re_t}_{t个},\underbrace{e_q\,Re_{q+1},\cdots,e_{p-1}Ry}_{p-q个}$.这表明$xR^k y$存在

除去e_t到e_q中过程，经过R的个数.　(不是元素的个数，它比R的个数多1)

3-8　关系的闭包运算

$\therefore$ 共有 $k=t+p-q=p-(q-t)<p$ 个

$\therefore <x,y>\in R^k, k<p$ 与 p 是最小的正整数发生矛盾

$\therefore\ p\le n.$ 而 $1\sim n$ 中可有最大的 $k\le n.$

$\therefore t(R)\subseteq R\cup R^2\cup\cdots\cup R^k \quad (k\le n)$

故 $t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^k \quad (k\le n)$

推论: $t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$

例：$A=\{a,b,c,d\}$

$R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,c>,<c,d>\}$

求 $t(R)$.　虽有 $k\le n$ 求 n 次即可:

注:至此我们介绍了两个有用的证明方法(数归法,反证法)

3-8 关系的闭包运算

解：$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M_{R^2} = M_R \circ M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{R^3} = M_{R^2} \circ M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad M_{R^4} = M_{R^3} \circ M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3-8　关系的闭包运算

$\therefore t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4.\quad M_{t(R)}=M_R\vee M_{R^2}\vee M_{R^3}\vee M_{R^4}=$

$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, M_R为高阶矩阵，求M_{R^i}.介绍$Warshall$计算R^+的

一种简单算法.(其有效性，正确性不讲)。

设M为R的关系矩阵

(1)置$A:=M$.

(2)置$i:=\ 1$.

(3)对每个j,若$A[j,i]=1$,则对$k=1,2\cdots,n$计算$A[j,k]:=A[j,k]+A[i,k]$

3-8　关系的闭包运算

(4)　$i := i + 1$

(5)转 $i \le n$, 转(3), 否则停止. $M_{R^+} = A$

例：$M = M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，求 $t(R)$

解：$A := M$,

$i := 1$, 第一列中只有$A[1,1] = 1$, 则第一行与第一列逻辑加，A不变

$i := 2$, 第二列中$A[1,2] = A[4,2] = 1$.将第二行加入到第一行，第四行中去。

3-8 关系的闭包运算

$$\therefore A=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$i=3,$第三列都为0，A不变。

$i=4,$第四列中$A[1,4]=A[2,4]=A[4,4]=1,$

第四行加到第1，第2，第4行中去。

$$\therefore A=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

3-8　关系的闭包运算

I=5 A中第5列，A[3，5]=1，将第5列加入到第3列，不变

I=6,j=7，第6列，第7列全为0，∴A不变

$$M_{R^+} = A = \begin{bmatrix} 1,1,0,1,0,0,0 \\ 0,1,0,1,0,0,0 \\ 0,0,0,0,1,0,0 \\ 0,1,0,1,0,0,0 \end{bmatrix}$$

这一算法只是用来求M_{R^+}，不是重点。

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3-8　关系的闭包运算

另外，对 R的自反闭包，对称闭包，传递闭包仍是关系，还可相互复合。有如下定理 ：

定理　设X是集合，R是X上二元关系，则：

$$a)\quad rs(R) = sr(R)$$

$$b)\quad rt(R) = tr(R)$$

$$c)\quad ts(R) \supseteq st(R)$$

3-8　关系的闭包运算

主要知识点（回顾）：

1、自反闭包

2、对称闭包

3、传递闭包

3-9　集合的划分和覆盖

定义：A是非空集合，$S=\{S_1, S_2, \ldots\ldots, S_m\}$，

$S_i \neq \phi, S_i \subseteq A, \bigcup_{i=1}^{m} S_i = A$, S称为A的覆盖，

又若$S_i \cap S_j = \phi (i \neq j)$,则$S$称为$A$的划分。

如A={a, b, c}下列一些集合:

S={{a, b}, {a, c}}　　　S是A的覆盖, S不是A的划分.

Q={{a}, {a, b}, {b, c}}　　　Q是A的覆盖, S不是A的划分.

G={{a, b, c}}　　　划分---最小划分

E={{a}, {b}, {c}}　　　划分—最大划分

3-9 集合的划分和覆盖

F={{a}, {b, c}}　　划分

H={{a}, {a, b}}　　不是覆盖, 不是划分.

注意:对于覆盖而言,一个元素可以属于两个分块,而对于划分,一个元素仅属于且必属于一个分块, **划分一定是覆盖,但覆盖未必是划分.**

2. 集合A，$S=\{S_1,S_2,\ldots,S_r\}$，$T=\{T_1,T_2,\ldots,T_k\}$是A的两个划分，把所有$S_i\cap T_j\neq\varnothing$构成的集合称为$S$和$T$的对$A$的交叉划分。

如A={a,b,c}，G={{a},{b，c}}，H={{a,b},{c}}，则G和H的交叉划分是{{a},{b},{c}}，同样也是A的划分

3-9　集合的划分和覆盖

对交叉划分有如下定理

定理：设$\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$与$\{B_1, B_2, \ldots, B_s\}$是$A$的两种划分，则它们的交叉划分也是$A$的一种划分。

证：要证明是划分必须证两点,(a)覆盖;(b)任两分块不交

交叉划分$\{A_1 \cap B_1, A_1 \cap B_2, \ldots, A_1 \cap B_s, A_2 \cap B_1, A_2 \cap B_2, \ldots, A_2 \cap B_s, \ldots, A_r \cap B_1, A_r \cap B_2, \ldots, A_r \cap B_s\}$将其中空集去掉。

(1)A的覆盖　$(A_1 \cap B_1) \cup (A_1 \cap B_2) \cup \ldots \cup (A_1 \cap B_s) \cup (A_2 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) \cup \ldots \cup (A_2 \cap B_s) \cup \ldots \cup (A_r \cap B_1) \cup (A_r \cap B_2) \cup \ldots \cup (A_r \cap B_s)$

$= (A_1 \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_s)) \cup (A_2 \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_s)) \cup \ldots \cup (A_r \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_s))$

$= (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_r) \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_s) = A \cap A = A$

3-9　集合的划分和覆盖

(2) $A_i \cap B_h, A_j \cap B_k$ 任两个分块，则有如下三种情况：

$(a)\, i \neq j, h = k, A_i \cap A_j = \varnothing, A_i \cap B_h \cap A_j \cap B_k = \varnothing$

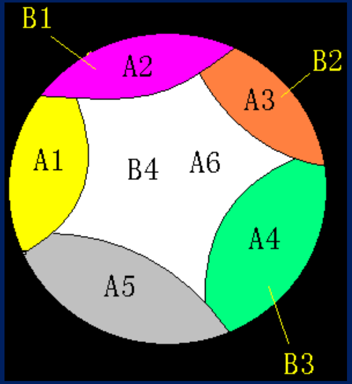
$(b)\, i \neq j, h \neq k, A_i \cap A_j = \varnothing, B_h \cap B_k = \varnothing$　　$\therefore A_i \cap B_h \cap A_j \cap B_k = \varnothing$

$(c)\, i = j, h \neq k$，同(a)

$\therefore (A_i \cap B_h) \cap (A_j \cap B_k) = \varnothing$　　故交叉划分也是A的划分

3定义：设$\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$和$\{B_1, B_2, \ldots, B_s\}$是$A$的两种划分，若对每一个$A_i$，存在$B_j$使得$A_i \subseteq B_j$，则称$\{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$是$\{B_1, B_2, \ldots, B_s\}$的加细。

$\{A_1, A_2, \ldots, A_6\}$是$\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$的加细（如图）。



3-9　集合的划分和覆盖

对于交叉划分和加细有如下定理：

定理:任意两种划分的交叉划分必是原来划分的加细.

证明：$A_i \cap B_j \subseteq A_i, A_i \cap B_j \subseteq B_j$　**故交叉划分是**S**的加细，也是**T**的加细。**

下面介绍集合中一个重要的关系：等价关系。

3-10 等价类与等价关系

1、定义： 若R为集合A上一个关系，满足R是自反的、对称的、传递的，则R称为**等价关系**。

如三角形的相似关系 $\begin{cases} \triangle \sim \triangle \\ \triangle_1 \sim \triangle_2 \Rightarrow \triangle_2 \sim \triangle_1 \\ \triangle_1 \sim \triangle_2,\ \triangle_2 \sim \triangle_3 \Rightarrow \triangle_1 \sim \triangle_3 \end{cases}$

“＝”为等价关系

A={1,2,3,4}

R={<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>,<2,2><2,3>,<3,2>,<3,3>},

则R是等价关系。

3-10 等价类与等价关系

R={<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>,<2,2><2,3>,<3,2><3,3>}

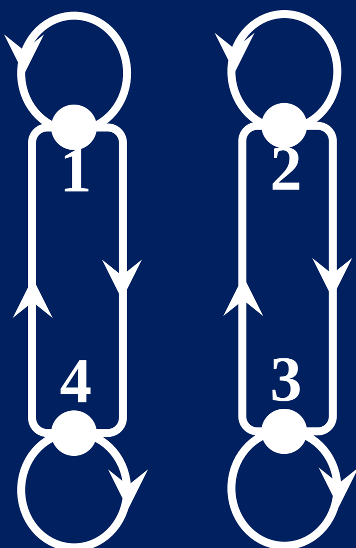
R的关系矩阵：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

M_R的对角线元数全为1，
G_R中每个结点有自回路
∴R是自反的

M_R是对称矩阵，G_R中每两个结点要么没有连线，要么有成对出现，
∴R是对称的

关系图：



传递性只能由序偶判断，
逐一检查得R是传递的。

∴由上所述可知R是等价关系

3-10　等价类与等价关系

例：I:整数集　$R=\{\langle x, y\rangle \mid x\equiv y(mod\ \ k)\}$ 这里$x\equiv y$（$mod\ k$）表示x、y被k除有相同的余数，叫做同余模k关系

$x=kt_1+a$　　$x\equiv y(mod\ \ k)$　　t_1、t_2、$t\in\ I$

$y=kt_2+a$　　$0\leqslant\ a<\ k$

即$x-y=\ k(t_1-t_2)$　则R是一个等价关系。

证明：1、$\forall x\in I, x-x=k\cdot 0, xRx$

$\therefore R$是自反的。

2、$xRy, x-y=kt, y-x=-kt=k(-t)$

$\therefore yRx, R$是对称的。

3、$xRy, yRz.$

$x-y=kt_1, y-z=kt_2\quad \therefore x-z=x-y+y-z=kt_1+kt_2=kt$

$\therefore xRz, R$是传递的，因此R是等价关系。

3-10　等价类与等价关系

2、定义：$\forall a \in A, [a]_R = \{x \mid \langle a, x \rangle \in R\}$称为$a$关于$R$的等价类，

或由a形成的R的等价类。

R是A上等价关系，若xRy, 则可知x和y是属于同一个等价类的

例：A={1,2,3,4},

R={<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>,<2,2><2,3>,<3,2>,<3,3>},

R是等价关系。

$[1]_R = \{1,4\} = [4]_R$,

$[2]_R = \{2,3\} = [3]_R$

3-10 等价类与等价关系

例：I:整数集 $R=\{\langle x, y\rangle \mid x\equiv y\,(mod\ \ k)\}$ 同余模k关系

R是一个等价关系。

取$k=3, R=\{<x,y>\mid x\equiv y(\text{mod}\,3)\}$

则：$[0]_R=\{\ldots,-6,-3,0,3,6,\ldots\}$ 被3除余数为0的集合 $\{3n \mid n\in I\}$

$[1]_R=\{\ldots,-5,-2,1,4,7,\ldots\}$ 被3除余数为1的集合 $\{3n+1 \mid n\in I\}$

$[2]_R=\{\ldots,-4,-1,2,5,8\ldots\}$ 被3除余数为2的集合 $\{3n+2 \mid n\in I\}$

3-10　等价类与等价关系

$$[0]_R = [3]_R = [-3]_R = \ldots$$

$$[1]_R = [4]_R = [-2]_R = \ldots$$

$$[2]_R = [5]_R = [-1]_R = \ldots$$

全体整数集I被分成了三个等价类$[0]_R$、$[1]_R$、$[2]_R$

3-10 等价类与等价关系

3、定理：R是A上等价关系，对$a,b \in A$有：$aRb \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$

证明：必要性：$<a,b> \in R$，设$c \in [a]_R \Rightarrow aRc \overset{\text{对称性}}{\Rightarrow} cRa \overset{\text{传递}}{\Rightarrow} cRb$

$\overset{\text{对称}}{\Rightarrow} bRc \Rightarrow c \in [b]_R$

$\therefore [a]_R \subseteq [b]_R$

同理：$[b]_R \subseteq [a]_R \;\therefore [a]_R = [b]_R$

充分性：已知$[a]_R = [b]_R$

$\because a \in [a]_R = [b]_R \;\therefore a \in [b]_R \;\therefore bRa \Rightarrow aRb$

对等价类来说，要么相等，要么交为空。

3-10　等价类与等价关系

4、定义：R是A上等价关系，其等价类集合$\{[a]_R \mid a \in A\}$称为A关于R的商集。

记作：$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$

等价类:元素的集合，A的子集；

商集:集合的集合

例：A={1,2,3,4},

R={<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>,<2,2><2,3>,<3,2>,<3,3>},

R是等价关系。

$[1]_R = \{1,4\} = [4]_R$,

$[2]_R = \{2,3\} = [3]_R$

$$A/R = \{[1]_R, [2]_R\}$$

3-10　等价类与等价关系

例：I:整数集　$R=\{\langle x, y\rangle \mid x \equiv y(mod\ \ k)\}$ 同余模k关系

R是一个等价关系。

取$k=3, R=\{<x, y>\mid x \equiv y(\mathrm{mod} 3)\}$

全体整数集I被分成了三个等价类$[0]_R$、$[1]_R$、$[2]_R$

$$I/R=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R\}$$

由等价关系可以得到商集，商集与A有何关系？

3-10　等价类与等价关系

5.定理：*R*是*A*上等价关系，*A/R*是*A*的一个划分。

证明：（1）覆盖

$\because A/R=\{[a]_R \mid a\in A\}\quad \therefore \bigcup\limits_{a\in A}[a]_R = A$

（2）对于$\forall [a]_R \neq [b]_R$，有$[a]_R \cap [b]_R = \phi$

反证法：假设$[a]_R \cap [b]_R \neq \phi$，则$\exists c$,使得$c \in [a]_R \cap [b]_R$

$\therefore c \in [a]_R$并且$c \in [b]_R$

$\therefore <a,c> \in R$并且$<b,c> \in R$

$\therefore <a,c> \in R$并且$<c,b> \in R$

$\therefore <a,b> \in R \quad \therefore [a]_R = [b]_R$矛盾

$\therefore [a]_R \cap [b]_R = \phi \quad \therefore A/R$是$A$的一个划分

反之，有划分也可确定等价关系。

3-10　等价类与等价关系

6.定理：集合A的一个划分可以确定A的一个等价关系。

证明比较简单。

已知划分$S=\{S_1,S_2,\cdots,S_m\}$,

作一关系R,若a, b在同一分块中，则$<a,b>\in R$。

可以证明R是自反的、对称的、传递的（请自证），

故R是等价关系。

$$R=\bigcup_{i=1}^{m}(S_i\times S_i)$$

R为每一分块取直积，做并。

3-10　等价类与等价关系

例 $A=\{a,b,c,d\}$，$S=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$是划分。

则确定的等价关系R为$\{\langle a, b\rangle,\langle b, a\rangle,\langle a, a\rangle,\langle b, b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$

$$R=(S_1\times S_1)\cup(S_2\times S_2)\cup(S_3\times S_3)$$

7.定理：R_1和R_2是非空集合A的两个等价关系，则

$$R_1=R_2 \Leftrightarrow A/R_1=A/R_2$$

搞清楚R_1、R_2、A/R_1、A/R_2的实质

证明：$\Rightarrow$（必要性）$\because R_1=R_2$

$$\therefore \forall a\in A, [a]_{R_1}=\{x \mid aR_1x\wedge x\in A\}=\{x \mid aR_2x\wedge x\in A\}=[a]_{R_2}$$

$$\therefore \left\{[a]_{R_1} \mid a\in A\right\}=\left\{[a]_{R_2} \mid a\in A\right\}$$

$$\therefore A/R_1=A/R_2$$

3-10　等价类与等价关系

$\Leftarrow$（充分性）若 $A/R_1 = A/R_2$ 两个集合相等，

$\forall [a]_{R_1} \in A/R_1$，$\exists [c]_{R_2} \in A/R_2$，$st.\ [a]_{R_1} = [c]_{R_2}$

$\therefore \forall <a,b> \in R_1$，有 $a \in [a]_{R_1} \wedge b \in [a]_{R_1}$

$\therefore a \in [c]_{R_2} \wedge b \in [c]_{R_2}$

$\therefore <a,b> \in R_2$

$\therefore R_1 \subseteq R_2$

反之同理可得 $R_2 \subseteq R_1$

$\therefore R_1 = R_2$

等价关系 小结

前面我们介绍了一个非常重要的关系——等价关系。

R是A上的等价关系，将与a等价的元素放在一起构成了a的等价类

（1）等价关系：自反性、对称性、传递性

（2）等价类：$[a]_R = \{x | x \in A \wedge aRx\}$

$$<a,b> \in R \Leftrightarrow [a]_R = [b]_R$$

$$<a,b> \notin R \Leftrightarrow [a]_R \cap [b]_R = \phi$$

（3）商集$A/R = \{[a]_R | a \in A\}$

3-12　序关系

主要知识点：

1、偏序关系、偏序集

2、y盖住x，覆盖集

3、哈斯图

4、链、反链

5、全（线）序集、良序集

6、极大元、极小元、最大元、最小元

7、上界、下界、上确界、下确界

3-12　序关系

1．定义：R是A上关系，满足自反性，反对称性，传递性，则称R为偏序关系记作"$\preccurlyeq$"。 序偶$< A ,\preccurlyeq>$称为偏序集。

例：　$\leq, \subseteq$ 等都是偏序关系, $< R,\leq>,< P(A),\subseteq>$ 都是偏序集。

例：$A=\{ 2 , 3 , 6 , 8 \}$. $R=\{ < x , y > \mid x$整除$y \}$

$R=\{ <2 , 2> , <2 , 6> , <2 , 8> , <3 , 3> , <3 , 6> , <6 , 6> , <8 , 8> \}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

易于验证，R满足自反性，反对称性，传递性

$\therefore R$是偏序关系， $\therefore < A , R >$是偏序集

3-12　序关系

偏序可以由A中元素按层次划分，为此先定义“盖住”。

2．定义：在$<A,\preccurlyeq>$中，若x，$y\in A$，$x\preccurlyeq y$，但$x\neq y$ 且不存在另外的$z\in A$，使得$x\preccurlyeq z$，$z\preccurlyeq y$，则称y盖住x。

并记$COV\ A=\{<x,y>|\ x，y\in A\wedge y$盖住$x\}$
（即x 与y直接有$\preccurlyeq$，中间不能再添加其他元素构成关系）

如上例中：
$R=\{<2,2>,<2,6>,<2,8>,<3,3>,<3,6>,<6,6>,<8,8>\}$
$<2,6>$是满足条件的，6盖住2。
$<2,6>$，$<3,6>$，$<2,8>$都是。
$\therefore\ COV\ A=\{<2,6>，<3,6>，<2,8>\}$

3-12　序关系

例：$A=\{x \mid x$是12的因子$\}=\{1,2,3,4,6,12\}$。

$R=\{<x,y> \mid x$整除$y\}$。

$R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,6>,$
$<1,12>,<2,2>,<2,4>,<2,6>,<2,12>,$
$<3,3>,<3,6>,<3,12>,<4,4>,<4,12>,$
$<6,6>,<6,12>,<12,12>\}$

可证R是偏序关系。

$$COV\,A=\{<1,2>,<1,3>,<2,4>,<2,6>,<3,6>,$$
$$<4,12>,<6,12>\}$$

3-12　序关系

3．偏序集　可用盖住的性质画出偏序集合中所有元素图形，称为哈斯图(Hasse)，其规则为：

（1）A中的元素用1 个圆圈表示。

（2）若$x \le y$，且$x \ne y$，则将代表y的圆圈画在代表 x的圆圈之上。

（3）若$< x , y > \in COV\,A$，则在x与y之间用直线连接。

这样得到的图形称为哈斯图。

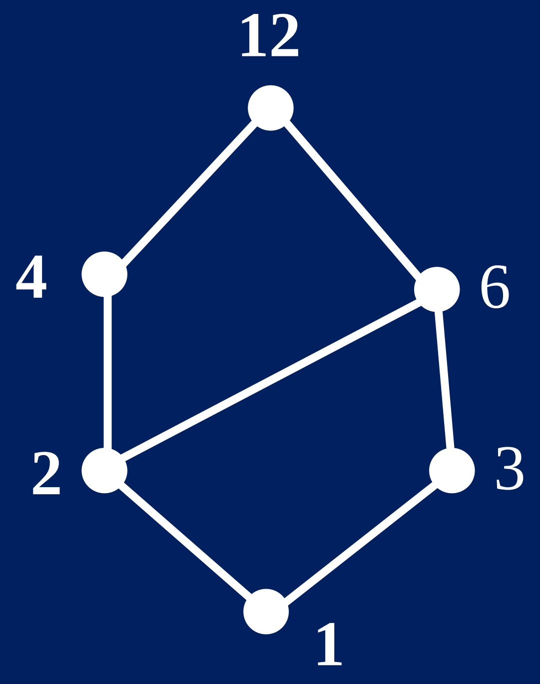
由Hasse图，可以清楚地看出结点的层次关系。

3-12　序关系

如上例中，$COV\,A = \{ <1,2>, <1,3>, <2,4>, <2,6>, <3,6>, <4,12>, <6,12> \}$

其Hasse图为:

A中元素按层次排列



3-12 序关系

偏序集中并非所有元素之间都有偏序关系，如上例中$<2,3>$。

4．链： 偏序集$<A,\preccurlyeq>$，$B\subseteq A$，若对于任意x，$y\in B$都有$x\preccurlyeq y$ 或者 $y\preccurlyeq x$，则称子集B是链。

若B中任意两个元素都不满足，则称B是反链。

即：链中任两个元素都是有关系的，
反链中任两个元素无偏序关系。

约定：若B中只有一个元素，规定B既是链又是反链。

3-12　序关系

例：$A=\{a,b,c,d,e\}$其关系矩阵为：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

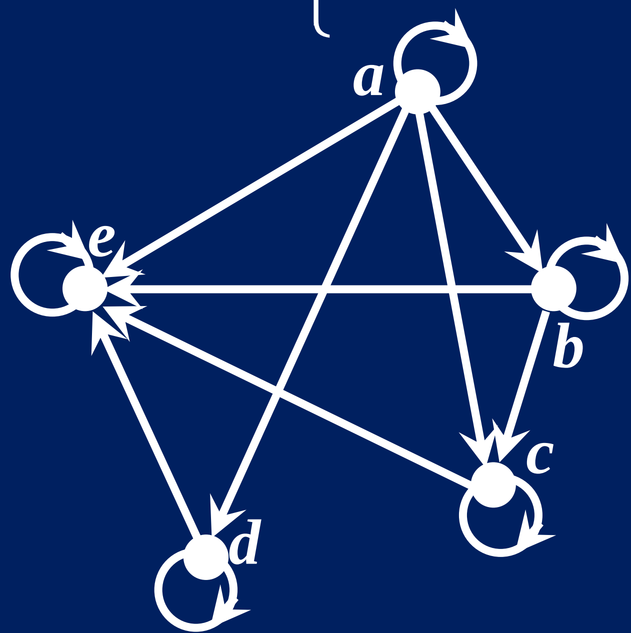
可以证明R是偏序关系

$$R=\left\{\begin{array}{ccccc}<a,a> & <a,b> & <a,c> & <a,d> & <a,e>\\ & <b,b> & <b,c> & & <b,e>\\ & & <c,c> & & <c,e>\\ & & & <d,d> & <d,e>\\ & & & & <e,e>\end{array}\right\}$$

$<A,R>$是一偏序集。

3-12 序关系

$$R=\left\{\begin{array}{ccccc} <a,a> & <a,b> & <a,c> & <a,d> & <a,e> \\ & <b,b> & <b,c> & & <b,e> \\ & & <c,c> & & <c,e> \\ & & & <d,d> & <d,e> \\ & & & & <e,e> \end{array}\right\}$$

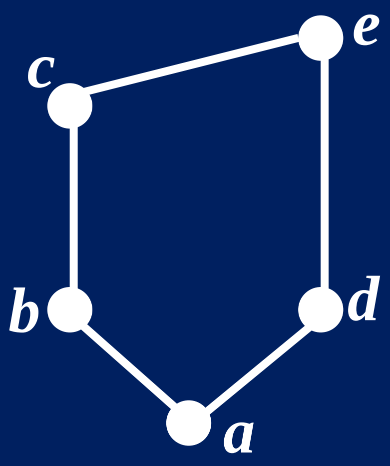


关系图

$$COV\,A=\{<a,b>,<a,d>,<b,c>,$$
$$<d,e>,<c,e>\}$$

3-12　序关系

$COV\,A = \{<a,b>, <a,d>, <b,c>, <d,e>, <c,e>\}$



哈斯图

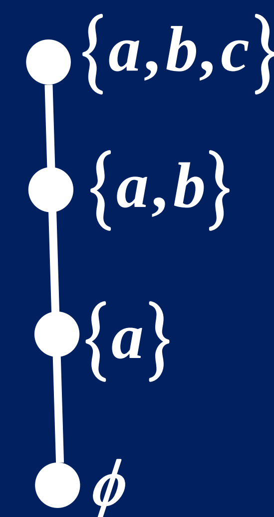
链：$\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{e\},$
$\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},\{a,b,c\},$
$\{a,d,e\},\{a,c,e\},\{a,b,c,e\}$等

反链：$\{a\},\{b\},\{c\},\{b,d\},$
$\{c,d\}$等。

3-12　序关系

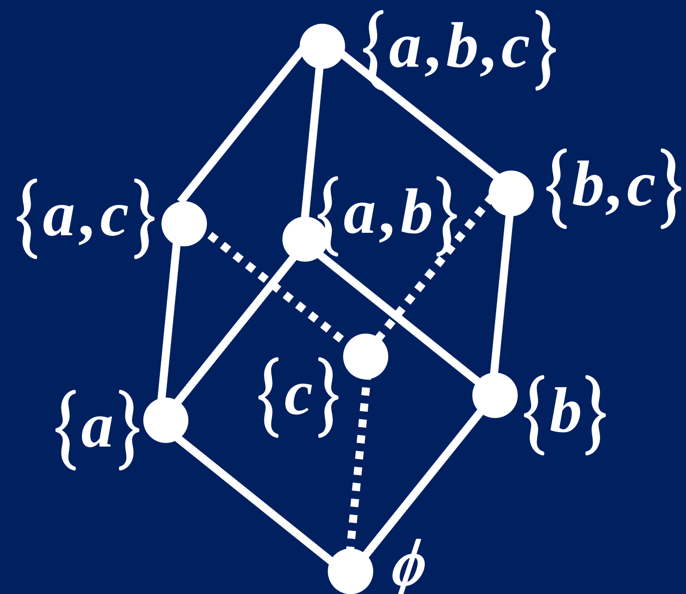
5．定义：偏序集$<A,\preccurlyeq>$，若A是一个链，则A是**全序集**或**线序集**。（即A中任何元素x，y有关系，或$x\preccurlyeq y$ 或 $y\preccurlyeq x$ ）

例：$P=\{\phi,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$,$<P,\subseteq>$ 是全序集。



例：$<P(\{a,b,c\}),\subseteq>$ 不是全序集。

$\because \{a\},\{b\}$无关,$\therefore P(\{a,b,c\})$不是全序关系



3-12　序关系

从哈斯图我们可以看出，A中各元素位于不同层次，有一些特殊位置的元素。下面将单独讨论这些元素。

6．极大元，极小元

定义偏序集$< A ,\preccurlyeq >$，$B \subseteq A$。

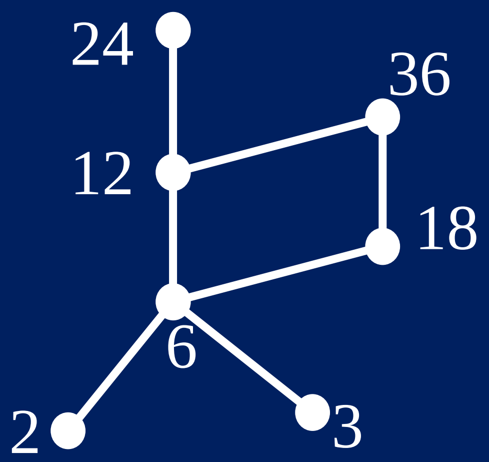
（1）$b \in B$，若不存在 $x \in B$使得$x \neq b$ 且$b \preccurlyeq x$，则称b是B的极大元。

（2）$b \in B$，若不存在 $x \in B$使得$x \neq b$ 且$x \preccurlyeq b$，则称b是B的极小元。

如$A = \{ 2 , 3 , 6 , 12 , 18 , 24 , 36 \}$。

$\preccurlyeq \; = \{ < x , y > \mid x整除y \}$

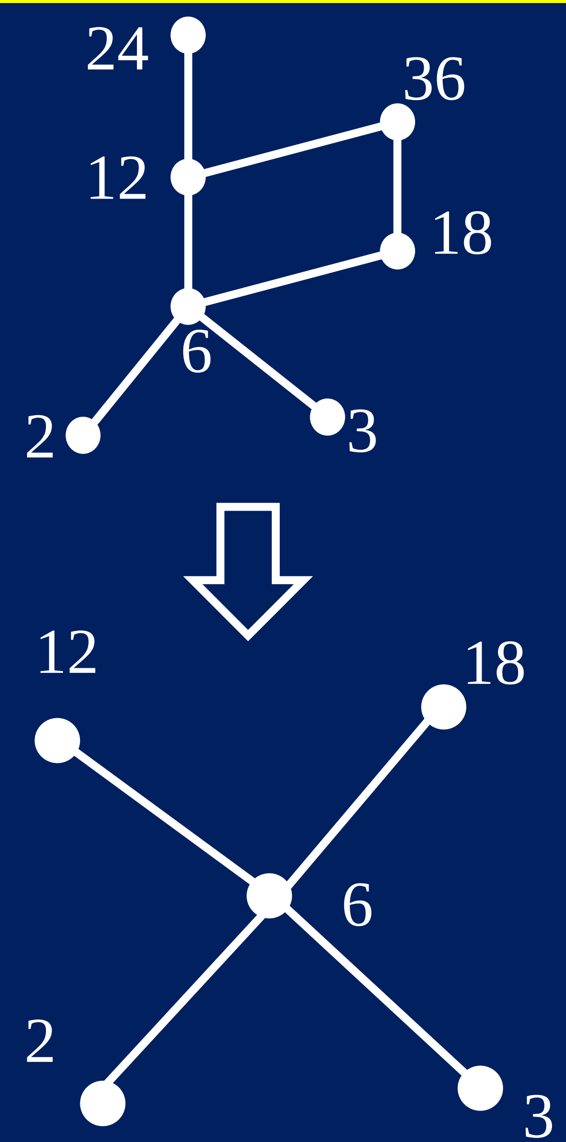
$< A ,\preccurlyeq >$偏序集。Hasse图为：



哈斯图

3-12　序关系

$B = \{2, 3, 6, 12, 18\}$
$COV\ B = \{<2, 6>, <3, 6>,$
$<6, 12>, <6, 18>\}$
$<B, \preccurlyeq>$ HASSE 图为：



*B*极大元：12 ，18 。极小元：2 ，3
∴Hasse图中最底层的元素是极小元
∴Hasse图中最顶层的元素是极大元

2 ，3无关，
并且不同的极大(小)元的之间是无关的。

7．最大元，最小元

定义：$<A, \preccurlyeq>$偏序集，$B \subseteq A$

（1）$b \in B$，对每个 $x \in B$都有$x \preccurlyeq b$，则称b是B的最大元。

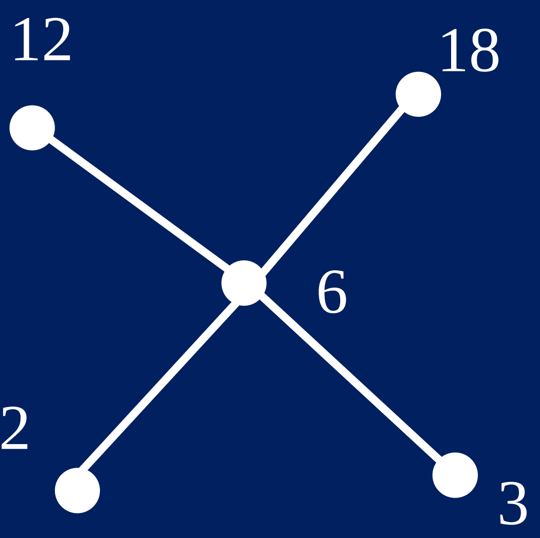
（2）$b \in B$，对每个 $x \in B$都有$b \preccurlyeq x$，则称b是B的最小元。

如上例：$A = \{2, 3, 6, 12, 18, 24, 36\}$。

$\preccurlyeq = \{<x, y> \mid x$整除$y\}$

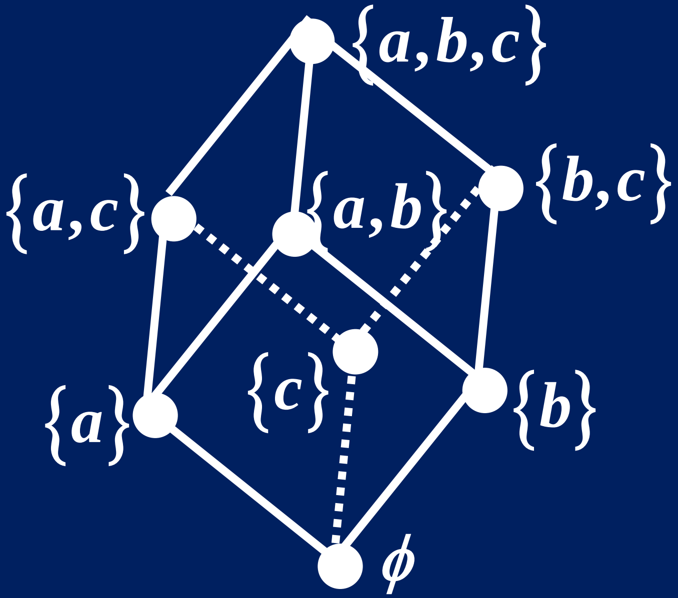
$B = \{2, 3, 6, 12, 18\}$

B没有最大元、最小元。



3-12　序关系

例：$\langle P(\{a,b,c\}),\subseteq\rangle$



$B1=\{\emptyset,\{a\}\}$

最大元：$\{a\}$。最小元：$\emptyset$。

$B2=\{\{a\},\{b\}\}$ 无最大最小元。

$B3=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

最大元：$\{a,b\}$。无最小元。

$\therefore$最大(小)元与极大(小)元不同。

（1）是最大(小)元$\Longrightarrow$极大(小)元，反之未必。

（2）极大(小)元不是唯一的，最大(小)元是唯一的。

极大元是B中没有元素比它大，可以是所有元素比它小，

也可以是不存在元素比它大，不好比较的也成立

3-12　序关系

（2）最大元是唯一的。

证：反证法：

若a，b都是B的最大元，$a \neq b$

由定义：a是B的最大元

∴$b \preccurlyeq a$，

又b是B的最大元

∴$a \preccurlyeq b$ 而$\preccurlyeq$是反对称的

∴$a = b$ 矛盾。

∴最大元唯一，

最小元类似 可证

8．上界，下界

定义：偏序集$< A ,\preccurlyeq >$，$B \subseteq A$

(a). 若$a \in A$，对 $x \in B$都有$x \preccurlyeq a$，则称a为B的上界。

(b). 若$a \in A$，对 $x \in B$都有$a \preccurlyeq x$，则称a为B的下界。

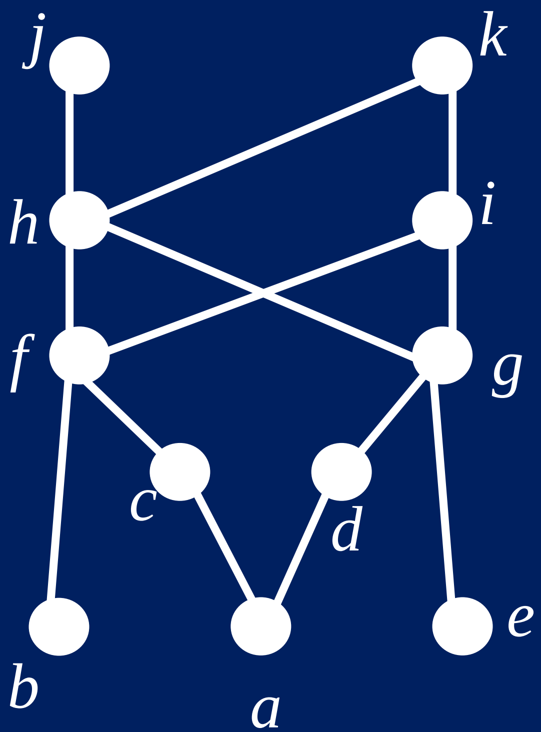
最大(小)元与上(下)界有区别的：

（1）最大元$b \in B$，而上(下)界$a \in A$

（2）最大(小)元是上(下)界，反之未必

3-12　序关系

例：$<A, \preccurlyeq>$的 Hasse图为：



$B1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
上界：h, i, j, k
下界：无

$B2 = \{h, i, j, k\}$
上界：无
下界：a, b, c, d, e, f, g

$B3 = \{h, i, f, g\}$
上界：k
下界：a　(不是b c d e)

3-12　序关系

9．上确界，下确界

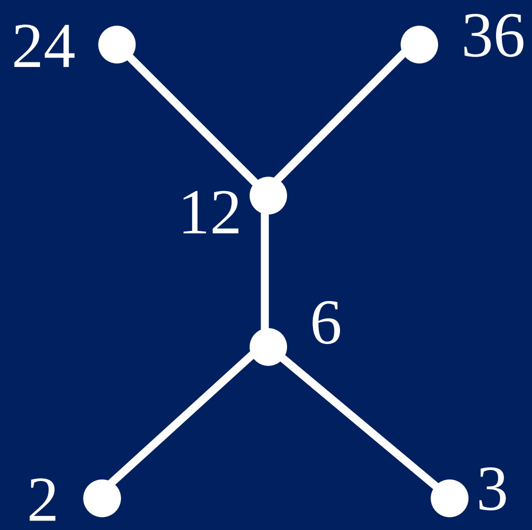
定义：偏序集$< A ,\preccurlyeq >$，$B \subseteq A$

（1）a为B的任一上界，若对B的所有上界 y 均有$a \preccurlyeq y$，
则称a为B的最小上界（上确界），记作 LUB B 。

（2）b为B的任一下界，若对B的所有下界 z 均有$z \preccurlyeq b$，
则称b为B的最大下界（下确界），记作 GLB B 。

3-12　序关系

例：$< A , \preccurlyeq >$

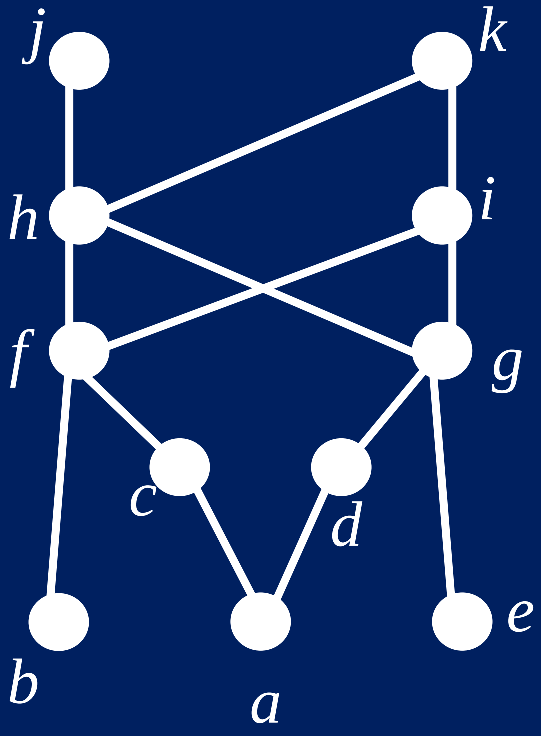


$B1 = \{ 2 , 3 , 6 \}$
上界：**6 , 12 , 24 , 36**
上确界：**6**

B2 = { 6 , 12 }
上界：**12，24，36**
最小上界：**12**
下界：**6，2，3**
最大下界：**6**

3-12　序关系

例：$< A, \preccurlyeq >$的 Hasse图为：



$B2 = \{ h, i, j, k \}$

上界：无

下界：a, b, c, d, e, f, g

上确界：无

下确界：无

3-12　序关系

10．良序集 定义：$<A,\preccurlyeq>$偏序集，若A的每个非空子集都有最小元，则称$<A,\preccurlyeq>$为良序集。

（1）定理：每个良序集必是全序集合

证：设$<A,\preccurlyeq>$是一良序集，要证$<A,\preccurlyeq>$是全序集，即证A是一个链。

$x,y\in A$，x,y有关系

而子集$\{x,y\}\subseteq A$，$<A,\preccurlyeq>$良序

$\therefore \{x,y\}$必有最小元，不是x就是y

$\therefore x\preccurlyeq y$或$y\preccurlyeq x$必有一个成立

$\therefore A$中任两元都有关系，即$<A,\preccurlyeq>$全序。

3-12　序关系

（2）定理：每个有限的全序集合，一定是良序集。

A无限时未必　如< A =（0，1），≤ > 全序集，
但（0，1）无最小元，　不是良序集。

对有限集而言，偏序集中，全序 $\Longleftrightarrow$ 良序

证：设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是全序集，

要证$<A,\preccurlyeq>$是良序集，（即任一非空子集有最小元）

反证：若$B\neq\phi$，$B\subseteq A$，B中无最小元

而B是有限集，又是全序集的子集，必有最小元，矛盾

$\therefore <A,\preccurlyeq>$是良序。

3-12　序关系

全序

良序 $\Rightarrow$ 偏序集

良序集 $\Rightarrow$ 全序集

良序集 $\xLeftarrow{\text{反之未必}}$ 全序集

（*A*为有限时成立）

序关系小结

主要知识点：

1、偏序关系、偏序集

2、y盖住x，覆盖集

3、哈斯图

4、链、反链

5、全（线）序集、良序集

6、极大元、极小元、最大元、最小元

7、上界、下界、上确界、下确界

本章课后作业

P109(1)(2)

P127(2-a)

P130(1)

P134(3)

P145(1)(6)